

Joanna Olbryś,
Wyższa Szkoła Ekonomiczna w Białymstoku,
Politechnika Białostocka,
e-mail: joanna.olbrys@wse.edu.pl

WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW MIAR RYZYKA EXPECTED SHORTFALL (ES) ORAZ VALUE-AT-RISK (VAR)

Streszczenie: Koncepcja wartości zagrożonej Value-at-Risk pojawiła się w 1994r. Obecnie VaR jest najbardziej popularną wśród praktyków miarą ryzyka, zalecaną np. przez Basel Committee on Banking Supervision. Niestety, nie jest miarą subaddytywną, co może prowadzić do zaburzeń w ocenie ryzyka portfeli zdywersyfikowanych. Jako alternatywę w stosunku do VaR można stosować spójną miarę ryzyka Expected Shortfall (ES). Celem artykułu jest zaprezentowanie własności estymatorów wartości zagrożonej Value-at-Risk (VaR_α) i miary Expected Shortfall (ES_α) oraz wpływu tych własności na wielkość pomiaru ryzyka na przykładzie jednostek wybranych otwartych funduszy inwestycyjnych na rynku polskim.

Słowa kluczowe: estymator miary ryzyka, Value-at-Risk, Expected Shortfall, Otwarte Fundusze Inwestycyjne

WARTOŚĆ ZAGROŻONA VALUE-AT-RISK ORAZ MIARA RYZYKA EXPECTED SHORTFALL

Definicja wartości zagrożonej $VaR_\alpha(X)$ (niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej X) (Acerbi, Tasche 2002):

$$VaR_\alpha(X) = q_{1-\alpha}^-(X) = \inf \{x : P(X \leq x) \geq 1 - \alpha\} \quad (1)$$

czyli wartość zagrożona $VaR_\alpha(X)$ dla przyjętego poziomu istotności α jest zdefiniowana jako dolny $(1-\alpha)$ - kwantyl $q_{1-\alpha}^-(X)$ rozkładu strata/zysk, natomiast zmienna X , określona jako strata, przyjmuje następujące wartości:

$$\begin{cases} \text{strata} \Rightarrow X > 0 \\ \text{zysk} \Rightarrow X < 0 \end{cases}$$

Wartość zagrożona VaR_α w praktyce (przy założeniu logarytmiczno – normalnego rozkładu stóp zwrotu) (Jackson, Staunton 2004):

$$VaR_\alpha = V_0 \cdot u_\alpha \cdot \sigma \quad (2)$$

gdzie:

V_0 - wartość pozycji narażonej na ryzyko,

u_α - wartość krytyczna, odczytana z tablicy rozkładu normalnego dla przyjętego poziomu istotności α (np. $\alpha = 0,05$, $u_\alpha = 1,65$),

σ - odchylenie standardowe (*volatility*) dziennych logarytmicznych stóp zwrotu instrumentu finansowego.

Dla danego horyzontu czasowego i poziomu prawdopodobieństwa α , wartość zagrożona VaR_α jest wartością krytyczną rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu. Jest to poziom straty, który może zostać przekroczony z prawdopodobieństwem co najwyżej α (lub nie zostanie przekroczony z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \alpha$). W porównaniu ze zwykłymi stopami zwrotu, logarytmiczne stopy zwrotu charakteryzują się większą symetrią (Jackson, Staunton 2004). Duże, gwałtowne zmiany logarytmicznych stóp zwrotu są bardzo mało prawdopodobne. Decydując, poprzez wybór poziomu istotności α (np. $\alpha = 0,05$), jak małe jest to prawdopodobieństwo, decydujemy jakie wielkości strat są praktycznie niemożliwe oraz ile kapitału należy utrzymać na ich ewentualne pokrycie.

Zastosowanie metody praktycznej (wzór (2)) na polskim rynku walutowym (Olbryś 2005) potwierdziło efekt niewielkiego zniżania wartości ryzyka w przypadku wyznaczania miary VaR_α , w stosunku do pomiarów uzyskanych za pomocą estymatora przedstawionego w kolejnym rozdziale (wzór (4)). Jednocześnie należy stwierdzić, że zwiększanie liczności próby prowadzi do zbliżania się wartości miary VaR_α , oszacowanych na podstawie wzorów (2) oraz (4).

Definicja miary ryzyka $ES_\alpha(X)$ (niezależnie od postaci rozkładu zmiennej losowej X) (Yamai, Yoshihara 2002b):

Niech X będzie zmienną losową określoną jako strata z danego portfela oraz niech $VaR_\alpha(X)$ będzie wartością zagrożoną tego portfela dla poziomu ufności $(1 - \alpha)$. Miarę ryzyka $ES_\alpha(X)$ definiujemy jako „średnią stratę w najgorszych $\alpha 100\%$ przypadkach” (Acerbi, Tasche 2002), gdzie $\alpha \in [0, 1]$:

$$ES_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)] \quad (3)$$

Z definicji wynika, że $ES_\alpha(X)$ jest warunkową wartością oczekiwaną straty, o ile strata ta przekroczy poziom $VaR_\alpha(X)$.

ESTYMATORY MIAR VALUE-AT-RISK ORAZ EXPECTED SHORTFALL

Przypuśćmy, że ciąg $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \dots, X_{(n\alpha+1)}, X_{(n\alpha)}, \dots, X_{(2)}, X_{(1)}$ tworzą empiryczne wartości strat ($X_i > 0$), uporządkowane w sposób rosnący. Wtedy, dla próby statystycznej o dużej liczności n estymator wartości zagrożonej

$VaR_\alpha(X)$, zdefiniowanej jako dolny $(1-\alpha)$ - kwantyl rozkładu strata/zysk dla przyjętego poziomu istotności α , dany jest wzorem (Yamai, Yoshida 2002b):

$$\text{estymator } VaR_\alpha(X) = X_{(n\alpha+1)} \quad (4)$$

Przypomnijmy, że zgodnie z definicją $VaR_\alpha(X)$ przyjętą w tej pracy (wzór (1)):

$$\begin{cases} \text{strata} \Rightarrow X_i > 0 \\ \text{zysk} \Rightarrow X_i < 0 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Jeśli $(n\alpha + 1) \notin Z$, gdzie Z jest zbiorem liczb całkowitych, to:

$$\text{estymator } VaR_\alpha(X) = X_{[n\alpha+1]} \quad (5)$$

gdzie $[n\alpha + 1] \in Z$ jest częścią całkowitą liczby $(n\alpha + 1) \notin Z$.

Analogicznie, zgodnie z definicją miary ryzyka $ES_\alpha(X)$ jako warunkowej wartości oczekiwanej straty X , o ile strata ta przekroczy poziom $VaR_\alpha(X)$ (wzór (3)), w przypadku próby o dużej liczności n estymator tej miary ma postać (Yamai, Yoshida 2002b):

$$\text{estymator } ES_\alpha(X) = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{(n\alpha+1)}}{n\alpha + 1} \quad (6)$$

Podobnie, jak w przypadku estymatora wartości zagrożonej, gdy $(n\alpha + 1) \notin Z$, to:

$$\text{estymator } ES_\alpha(X) = \frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{[n\alpha+1]}}{[n\alpha + 1]} \quad (7)$$

WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW MIAR VALUE-AT-RISK ORAZ EXPECTED SHORTFALL

Najbardziej podstawowe, pożądane własności wszelkich estymatorów to: nieobciążoność, zgodność, efektywność oraz dostateczność (wystarczalność) (Jóźwiak, Podgórski 1998).

Estymator wartości zagrożonej $VaR_\alpha(X)$, określony jako odpowiedni element próby uporządkowanej w sposób rosnący i dany wzorem (5), jest estymatorem nieobciążonym wartości oczekiwanej straty. Własność nieobciążoności oznacza, że przy wielokrotnym losowaniu próby średnia z wartości przyjmowanych przez estymator nieobciążony równa jest wartości szacowanego parametru. W wyniku jednej próby ocena parametru różni się oczywiście od jego wartości, ale stosowanie estymatora nieobciążonego gwarantuje, że oceny parametru nie są obciążone błędem systematycznym.

Estymator miary ryzyka $ES_\alpha(X)$, określony jako średnia arytmetyczna i dany wzorem (7), jest estymatorem nieobciążonym oraz najefektywniejszym wartości oczekiwanej straty w rozkładzie logarymiczno – normalnym (czyli w przypadku logarytmicznych stóp zwrotu). Wynika to z faktu, że średnia arytmetyczna jest lepszym (o mniejszej wariancji D^2) estymatorem oczekiwanej straty, niż dowolna i-ta zmienna z próby:

$$D^2(\text{estymator } ES_\alpha(X)) = D^2\left(\frac{X_{(1)} + X_{(2)} + \dots + X_{[n\alpha+1]}}{[n\alpha+1]}\right) = \frac{D^2(\text{estymator } VaR_\alpha(X))}{[n\alpha+1]} \quad (8)$$

$$D^2(\text{estymator } ES_\alpha(X)) < D^2(\text{estymator } VaR_\alpha(X))$$

Estymator miary ryzyka $ES_\alpha(X)$ jest również, jako średnia arytmetyczna, zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej straty. Własność ta oznacza, że dla dostatecznie dużych licznosci próby estymator przyjmuje z dużym prawdopodobieństwem wartości bliskie estymowanemu parametrowi (Gajek, Kałużka 2000).

Ostatnią z podstawowych własności estymatorów jest dostateczność (wystarczalność). Estymator danego parametru jest dostateczny, jeżeli zawiera wszystkie informacje, jakie można uzyskać na temat tego parametru na podstawie próby statystycznej i żaden inny estymator nie umożliwi otrzymania dodatkowych informacji o szacowanym parametrze. Estymator dostateczny nie zawsze istnieje. Porównując estymatory dane wzorami (5) oraz (7) możemy stwierdzić, że *estymator* $ES_\alpha(X)$, jako średnia arytmetyczna, dostarcza więcej informacji na temat oczekiwanej straty, niż *estymator* $VaR_\alpha(X)$, będący jedynie określoną wartością zmiennej strata/zysk z próby statystycznej.

Podsumowując, należy podkreślić, że ze względu na własności estymatora miary $ES_\alpha(X)$, daje on lepsze, bardziej dokładne przybliżenie wartości oczekiwanej straty.

PRZYKŁADY SZACOWANIA RYZYKA JEDNOSTEK WYBRANYCH OTWARTYCH FUNDUSZY INWESTYCYJNYCH ZA POMOCĄ ESTYMATORÓW MIAR VALUE-AT-RISK ORAZ EXPECTED SHORTFALL

We wszystkich prezentowanych przykładach otrzymane wartości miar VaR_α oraz ES_α interpretujemy jako poziom straty, który może zostać przekroczony odpowiednio z prawdopodobieństwem $\alpha = 0,01$ lub $\alpha = 0,05$. Utrzymując pozycję długą (zakup) 1 jednostki danego otwartego funduszu inwestycyjnego możemy spodziewać się, że strata poniesiona w ciągu jednego dnia nie przekroczy poziomu VaR_α lub ES_α z prawdopodobieństwem odpowiednio 0,99 lub 0,95.

Przykład 1

Przykład ten dotyczy szacowania ryzyka oraz analizy wyników w przypadku Otwartych Funduszy Inwestycyjnych akcji. Wybrane zostały cztery spośród najlepszych, ze względu na osiągniętą stopę zwrotu, funduszy z okresu obejmującego próbę statystyczną, czyli od 2 stycznia 2004r. do 30 marca 2006r.

Tabela 1 Wybrane OFI akcji uporządkowane malejąco według stopy zwrotu

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Stopa zwrotu (bez prowizji i podatku)	Stopa zwrotu (po uwzględnieniu prowizji i podatku)
ARKA BZ WBK Akcji FIO	124,86%	95,67%
BPH FIO Akcji	84,40%	63,88%
DWS Polska FIO Akcji Plus	80,89%	58,20%
Skarbiec-Akcja FIO Akcji	80,80%	57,39%

Źródło: www.money.pl

Pomiar jednodniowego ryzyka dłuższej pozycji 1 jednostki uczestnictwa każdego z funduszy dokonany został na podstawie próby statystycznej o licznosci $n = 570$ dziennych obserwacji (dane z okresu: I kwartał 2004r. - I kwartał 2006r., czyli 02.01.2004 – 30.03.2006). Wartości miar VaR_{α} oraz ES_{α} podane są w PLN. Obliczenia wykonano dla poziomów istotności $\alpha = 0,01$ oraz $\alpha = 0,05$.

Tabela 2 Wartości estymatorów miar Value-at-Risk oraz Expected Shortfall w przypadku wybranych OFI akcji

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Wartość jednostki uczestnictwa w PLN (dn. 30 marca 2006)	Estymator $VaR_{0,01}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,01}$ wzór (2.4)	Estymator $VaR_{0,05}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,05}$ wzór (2.4)
ARKA BZ WBK Akcji FIO	35,01	0,51	0,64	0,32	0,45
BPH FIO Akcji	297,57	4,81	5,99	2,51	3,79
DWS Polska FIO Akcji Plus	197,97	3,21	3,86	1,69	2,52
Skarbiec-Akcja FIO Akcji	253,90	4,05	4,81	2,17	3,24

Źródło: opracowanie własne

Przykład 2

Kolejny przykład dotyczy estymacji ryzyka oraz analizy wyników w przypadku Otwartych Funduszy Inwestycyjnych papierów dłużnych. Wybrane

zostały cztery najlepsze, ze względu na osiągniętą stopę zwrotu, fundusze z okresu obejmującego próbę statystyczną, czyli od 2 stycznia 2004r. do 30 marca 2006r.

Tabela 3 Wybrane OFI papierów dłużnych uporządkowane malejąco według stopy zwrotu po uwzględnieniu prowizji i podatku

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Stopa zwrotu (bez prowizji i podatku)	Stopa zwrotu (po uwzględnieniu prowizji i podatku)
DWS Polska FIO Konwergencji	20,42%	16,05%
ARKA BZ WBK Obligacji FIO	16,71%	13,54%
PIONEER Obligacji Skarbowych FIO	18,41%	13,23%
KBC Obligacyjny FIO	16,73%	12,61%

Źródło: www.money.pl

Pomiar jednodniowego ryzyka pozycji długiej 1 jednostki uczestnictwa każdego z funduszy dokonany został na podstawie próby statystycznej o licznosci $n = 570$ dziennych obserwacji (dane z okresu: I kwartał 2004r. - I kwartał 2006r., czyli 02.01.2004 – 30.03.2006). Wartości miar VaR_{α} oraz ES_{α} podane są w PLN. Obliczenia zostały wykonane dla poziomów istotności $\alpha = 0,01$ oraz $\alpha = 0,05$.

Tabela 4 Wartości estymatorów miar Value-at-Risk oraz Expected Shortfall w przypadku wybranych OFI papierów dłużnych

Nazwa funduszu inwestycyjnego	Wartość jednostki uczestnictwa w PLN (dn. 30 marca 2006)	Estymator $VaR_{0,01}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,01}$ wzór (2.4)	Estymator $VaR_{0,05}$ wzór (2.2)	Estymator $ES_{0,05}$ wzór (2.4)
DWS Polska FIO Konwergencji	128,52	0,64	0,95	0,39	0,56
ARKA BZ WBK Obligacji FIO	12,64	0,06	0,09	0,03	0,05
PIONEER Obligacji Skarbowych FIO	11,90	0,03	0,05	0,02	0,03
KBC Obligacyjny FIO	125,48	0,43	0,51	0,25	0,36

Źródło: opracowanie własne

Zaprezentowane wyniki szacowania ryzyka jednodniowej długiej pozycji jednostki wybranego funduszu inwestycyjnego za pomocą estymatorów miar

VaR_α oraz ES_α dostarczają informacji, ile kapitału należy utrzymać na pokrycie ewentualnej straty, która może mieć miejsce raz na 100 dni (dla $\alpha=0,01$) lub raz na 20 dni (w przypadku $\alpha=0,05$). Otrzymane oszacowania estymatorów obu miar dla poszczególnych funduszy są bardzo zróżnicowane, ponieważ zależą od wartości jednostki uczestnictwa danego funduszu. O ile na przykład wartości estymatora $ES_{0,01}$ w grupie funduszy akcyjnych (Tabela 2) wahają się od 0,64 PLN (ARKA Akcji) do 5,99 PLN (BPH Akcji), to już wartości procentowe oczekiwanych strat są bardzo zbliżone. W przypadku OFI akcji (Tabela 2) maksymalne wartości estymatora wartości zagrożonej, czyli $ES_{0,01}$ stanowią od ok. 1,8% (ARKA Akcji) do ok. 2,0% (BPH Akcji) wartości jednostki uczestnictwa danego funduszu (przeciętnie ok. 1,9% w tej grupie funduszy). Natomiast w grupie OFI papierów dłużnych (Tabela 4) stosunek maksymalnej wartości narażonej na ryzyko, mierzonej estymatorem $ES_{0,01}$, do wartości jednostki uczestnictwa odpowiedniego funduszu jest dużo niższy i wynosi od ok. 0,4% (PIONEER Obligacji Skarbowych i KBC Obligacyjny) do ok. 0,7% (DWS Konwergencji i ARKA Obligacji). Średnio w grupie funduszy obligacyjnych stosunek ten jest równy ok. 0,55%. Oznacza to, że przeciętnie wartość zagrożona stanowi ok. 1,9% wartości jednostki uczestnictwa funduszu akcji oraz, odpowiednio ok. 0,55% wartości jednostki uczestnictwa funduszu papierów dłużnych. Jest to interesujące spostrzeżenie, które może znacznie ułatwić inwestorowi ocenę ryzyka zajętej pozycji, o ile dokona estymacji miary $ES_{0,01}$ dla wszystkich dostępnych na rynku funduszy wybranego typu i ustali przeciętny procentowy udział wartości estymatora w wartości jednostki uczestnictwa funduszu. Jak pokazują przedstawione przykłady, odchylenia udziałów procentowych od wartości średniej w przypadku wybranych funduszy są minimalne.

Przykłady potwierdzają większą restrykcyjność miary ES_α w stosunku do wartości zagrożonej VaR_α , co ujawnia się w wyższych wartościach estymatora ES_α przy tym samym poziomie prawdopodobieństwa α , dla tego samego funduszu i próby statystycznej z tego samego okresu. Oznacza to, że stosowanie miary ES_α wymusza utrzymanie większego kapitału na pokrycie ewentualnych strat, co może wydawać się dość dużym ograniczeniem. Należy jednak pamiętać, że estymator $ES_\alpha(X)$ ma lepsze własności, niż estymator $VaR_\alpha(X)$, zatem daje lepsze oszacowanie wartości oczekiwanej straty.

Przedstawione obliczenia pozwalają również zaobserwować własność monotoniczności obu miar ze względu na poziom prawdopodobieństwa α . Wartości estymatorów $VaR_{0,01}$ oraz $ES_{0,01}$ są wyższe, niż wartości $VaR_{0,05}$

i $ES_{0,05}$ odpowiednio, niezależnie od rodzaju funduszu. Wartości estymatora $ES_{0,01}$ zawsze są maksymalne (wartości wyróżnione w tabelach 2 oraz 4).

PODSUMOWANIE

Podsumowując należy stwierdzić, że przykłady empiryczne, uzyskane z wykorzystaniem estymatorów miar VaR_α oraz ES_α , potwierdziły znane z literatury przedmiotu własności obu miar (Olbryś 2005). Ważną własnością miar VaR_α oraz ES_α jest ich monotoniczność ze względu na poziom prawdopodobieństwa α (Arcebi, Tasche 2002). Im niższa jest wartość α , tym większa jest wartość miary ryzyka danego portfela. Zarządzający portfelem decyduje o wyborze wartości współczynnika α i w zależności od tego szacuje ryzyko portfela.

Miara ES_α , pomimo zalet wynikających z własności spójności, posiada też słabe strony (Yamai, Yoshida 2002a). Zdefiniowana jako wartość oczekiwana strat przewyższających poziom VaR_α , jest trudna do testowania wstecznego. Testy wsteczne powinny porównywać wartość średnią faktycznie zrealizowanych strat przekraczających poziom VaR_α , z uzyskanym estymatorem miary ES_α . Wymaga to dużej liczby danych statystycznych, ponieważ straty przekraczające wartość VaR_α występują rzadko.

Błąd estymacji wartości zagrożonej VaR_α , oszacowanej na podstawie tej samej próby statystycznej z reguły jest mniejszy, niż błąd estymacji miary ES_α (Yamai, Yoshida 2002b). Oznacza to, że uzyskanie zbliżonej dokładności estymacji wymaga, w przypadku miary ES_α , większej liczby danych.

Poza tym, w przeciwieństwie do wartości zagrożonej VaR_α , nie jest możliwe, poprzez wybór odpowiedniego poziomu prawdopodobieństwa α , „dopasowanie” miary ES_α do indywidualnych potrzeb monitorowania ryzyka danej instytucji finansowej. Jest to jedna z głównych przyczyn nieobecności miary ES_α wśród narzędzi pomiaru ryzyka stosowanych powszechnie przez praktyków.

LITERATURA

- Acerbi C., Tasche D. (2002) On the coherence of Expected Shortfall, In: Szegö G. (Ed.) „Beyond VaR“ (special issue), Journal of Banking & Finance 26 (July)
- Gajek L., Kałużka M. (2000) Wnioskowanie statystyczne, WNT, Warszawa
- Jackson M., Staunton M. (2004) Zaawansowane modele finansowe z wykorzystaniem Excela i VBA, Wydawnictwo Helion, Gliwice
- Jóźwiak J., Podgórski J. (1998) Statystyka od podstaw, PWE, Warszawa

Olbryś J. (2005) Estymatory miar Expected Shortfall i Value-at-Risk: przykłady zastosowania do pomiaru ryzyka walutowego, Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a rynek polski. Prace naukowe AE im. O.Langego we Wrocławiu, Nr 1088, 65-72

Tasche D. (2002) Expected Shortfall and beyond, Journal of Banking & Finance 26, 1519-1533

Yamai Y., Yoshida T. (2002a) On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall, Monetary and Economic Studies, January, 57-85

Yamai Y., Yoshida T. (2002b) Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk: Their Estimation Error, Decomposition and Optimization, Monetary and Economic Studies, January, 87-121

www.kpwig.gov.pl

www.money.pl

Strony internetowe wybranych Towarzystw Funduszy Inwestycyjnych:

www.wbkaib.pl

www.dws.com.pl

www.skarbiec.com.pl

www.bph.pl

www.kbctfi.pl

www.pioneer.com.pl

Properties of estimators of risk measures Expected Shortfall (ES) and Value-at-Risk (VaR)

Summary: Concept of Value-at-Risk appears in 1994. Nowadays VaR is the most popular risk measure. Unfortunately, it fails to reward diversification, as it is not subadditive. In the search for a suitable alternative to VaR, Expected Shortfall (ES) has been characterized as the smallest coherent risk measure to dominate VaR. The aim of this paper is a presentation of the Expected Shortfall and Value-at-Risk estimators properties and an application of ES and VaR estimators to risk estimate examples on the Polish Open-end Investment Funds market. The paper also offers a comparison of ES and VaR estimators as the risk measures.

Key words: Risk Measure Estimator, Value-at-Risk, Expected Shortfall, Open-end Investment Funds