Sławomir Juszczyk
Katedra Ekonomiki i Organizacji Przedsiębiorstw
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Michał Tymiński
Wydział Zarządzania
Wyższa Szkoła Gospodarki Krajowej w Kutnie

Dwukryterialna koncepcja budowy portfela inwestycyjnego metodą programowania dynamicznego

Wstęp

W gospodarce rynkowej coraz większe znaczenie w procesach inwestowania ma rynek kapitałowy. Procesy te obejmują zarówno pozyskiwanie kapitału, jak i zwiększanie potencjału finansowego inwestora przez zakup portfela instrumentów finansowych na rynku kapitałowym.

Celem artykułu jest zaprezentowanie nowej dwukryterialnej koncepcji optymalizacji portfela akcji na rynku kapitałowym. Przez dwukryterialność należy rozumieć zastosowanie kryterium maksymalizacji dochodu z portfela przy możliwie najmniejszym ryzyku rozpatrywanym w układzie dynamicznym, tj. zmieniającym się w czasie. Zaproponowana koncepcja ma charakter sprzężenia zwrotnego między kategoriami: dochód – ryzyko. Nowym elementem jest zastosowanie elementów teorii niezawodności na etapie wstępnego wyboru instrumentów finansowych (akcji). Do rozwiązania wykorzystano ponadto dotychczas niestosowaną metodę programowania dynamicznego, która pozwala wyznaczać optymalne decyzje, a więc rozwiązywać modele niezależnie od charakteru parametrów modelu. Inne metody pozwalają znajdować rozwiązania optymalne, ale ich stosowanie uzależnione jest od charakteru parametrów modelu [Sadowski 1969, s. 281].

Aby zrealizować cel, przeprowadzono rozważania na przykładzie pakietu spółek akcyjnych notowanych na GPW w Warszawie. Przedstawiając algorytm tworzenia optymalnego portfela akcji zastosowano metody optymalizacyjne, uwzględniające zasadę optymalności Bellmana oraz elementy teorii niezawodności [Bellman 1965, s. 105]. Zwiększają one trwałość portfela i dają lepszą trafność predykcji na krótkie i średnie okresy. W literaturze przedmiotu występuje wiele innych metod doboru instrumentów finansowych do portfela. Klasyczne bowiem podejście inwestora jest zgodne z zasadą minimalizacji ryzyka przy zadanym poziomie stopy zwrotu lub maksymalizacji oczekiwanego zysku dla zaakceptowanego poziomu ryzyka. Jednak istotą omawianego zagadnienia jest to, że dyskusyjnym problemem, przed którym staje inwestor, jest jednoczesne określenie optymalnych wartości oczekiwanego zysku oraz ryzyka. Dlatego też Tarczyński proponuje podejmowanie dalszych badań nad konstruowaniem portfela papierów wartościowych i odchodzenie od modeli opartych na teorii Markowitza, gdyż za pomocą formuły H. Markowitza nie można dokładnie określić optymalnego portfela inwestycyjnego, lecz można na jej podstawie otrzymać zbiór portfeli opłacalnych pod względem stopy zysku i ryzyka. Są to portfele dające maksymalne zyski przy danym poziomie ryzyka lub minimalne ryzyko dla danej wysokości zysków [Tarczyński 1997, s. 79].

Poszukiwanie nowych metod jest uzasadnione, mimo że mają one zarówno wady, jak i zalety. Metody idealnej pod każdym względem w praktyce nie ma, w każdym razie na rynku kapitałowym taka metoda nie istnieje. Wynika to z tego, że metoda taka doprowadziłaby do zaniku handlu i w konsekwencji upadku rynku [Tarczyński 2002, s. 185]. Przestawiona w niniejszym artykule koncepcja jest nowym podejściem metodologicznym i próbą udoskonalenia trafności decyzji w obszarze konstrukcji optymalnego portfela akcji.

Wybór akcji do portfela przy wykorzystaniu elementów teorii niezawodności

Z próby generalnej obejmującej wszystkie spółki notowane na GPW do badań wybrano w sposób losowy pakiet zawierający 10 spółek akcyjnych. Badania dotyczyły okresu 01 VII 2007 – 30 IV 2008. W pakiecie znalazły się następujące spółki:

- Amica (AMC) – producent sprzętu AGD,
- Elektrim (ELE) – eksporter, importer i sprzedawca energii elektrycznej,
- Huta Irena SA (IRE) – producent szkła gospodarczego,
- Koelner (KLR) – producent technik zamocowań,
- MCI (MCI) – fundusz technologiczny,
- Netia – firma telekomunikacyjna,
- PKO SA (PKO) – bank,
- Śnieżka (SKA) – producent farb,
- Torfarm (TFM) – dystrybutor farmaceutyczny,
- Wistil (WST) – producent tkanin.

Koncepcja zastosowana w artykule objęła dwa etapy procesu:

1. Wyboru akcji do portfela przy zastosowaniu teorii niezawodności.
2. Optymalizacji mającej na celu maksymalizację stopy zwrotu przy równoczesnej minimalizacji ryzyka wybranego portfela akcji drogą programowania dynamicznego.

Dane wyjściowe spółek przedstawiono w tabeli 1.

Oczekiwana stopa zwrotu jest to średnia stopa zwrotu z 10 okresów. Konstrukcja i rozwiązanie modelu optymalizacyjnego przebiegały w kilku krokach. Proces optymalizacji rozpoczynał się od oceny próby badawczej na podstawie miernika niezawodności. Jest to prawdopodobieństwo spełnienia określonych warunków realizacji zadań. Klasycznym miernikiem jest formuła Wienera:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} \tag{1}$$

gdzie:
$R(t)$ – miernik niezawodności,
e – stała Eulera,
$\lambda(t)$ – intensywność niekorzystnych zmian wartości instrumentów finansowych w portfelu[1].

W ujęciu statystycznym miernik niezawodności jako wartość przybliżona ma postać:

$$R(t) = \frac{\hat{N}_{r+}}{N_p} \tag{2}$$

gdzie:
$\hat{N}_{r+}$ – liczba dodatnich stóp zwrotu,
N_p – liczba produktów w czasie t = 0, tutaj rozumianych jako suma początkowych wartości stóp zwrotu we wszystkich okresach.

Zmodyfikowana postać miernika (1) ma zastosowanie do wyboru „najlepszych” spółek, to znaczy o najwyższej wartości R:

$$R = \frac{\Sigma\hat{r}_+}{\Sigma mr} \tag{3}$$

gdzie:
$\sum \hat{r}_+$ – suma wszystkich dodatnich stóp zwrotu w procentach,
Σmr – suma modułów wszystkich stóp zwrotu w procentach wartości bezwzględnych.

[1]Więcej na ten temat: Zawiślak R., Tymiński M., *A concept of using a dynamic programic method to optimize an investment portfolio.*

Tabela 1
Wartości średnie stóp zwrotu w okresie 01 VII 2007 – 30 IV 2008

Spółki	Stopy zwrotu (średniomiesięczne w %)										
	r 1	r 2	r 3	r 4	r 5	r 6	r 7	r 8	r 9	r 10	oczeki-wana
AMC	6,11	1,4	0,42	3,32	6,86	–3,16	–27,55	–10,00	–9,82	3,64	–2,87
ELE	–59,13	73,22	34,69	–3,12	9,09	–13,33	–11,76	–23,68	–27,66	3,33	–1,84
IRE	1,56	9,52	0,88	12,39	6,06	–13,99	7,55	–14,39	–15,18	–0,78	–0,63
KLR	–1,56	10,26	9,71	0,63	17,20	23,85	7,07	20,75	4,07	9,94	8,79
MCI	4,07	3,10	–1,02	6,47	1,85	–7,25	1,55	–15,88	10,00	2,04	0,19
NET	12,50	–2,04	–10,00	–5,45	–5,17	16,36	0,00	–2,17	4,26	6,67	2,53
PKO	4,18	2,56	8,42	–3,16	0,28	6,70	–9,28	7,95	10,12	3,31	3,11
SKA	2,98	4,44	–1,43	3,87	6,96	7,48	6,38	–13,64	–2,00	–9,02	0,60
TFM	2,70	22,78	–6,24	2,93	0,00	3,72	–0,72	6,95	9,79	–1,43	4,05
WST	6,67	–3,93	–3,09	6,67	–6,43	–8,73	–3,70	–1,19	–24,12	–2,13	–4,00
WIG	7,23	4,03	2,95	5,24	–19,60	23,91	–4,51	6,99	3,82	6,67	3,68

Źródło: Opracowanie własne na podstawie www.rynek.owg.pl wg stanu na V 2008

I tak R dla poszczególnych spółek przyjmuje wartości:

$$\hat{R}(10)_{KLR} = \frac{96,51}{105,14} = 0,9179 \qquad \hat{R}(10)_{SKO} = \frac{32,11}{58,19} = 0,5517$$

$$\hat{R}(10)_{MCI} = \frac{27,88}{53,88} = 0,5174 \qquad \hat{R}(10)_{TFM} = \frac{48,87}{57,26} = 0,8535$$

$$\hat{R}(10)_{NET} = \frac{44,96}{64,62} = 0,6958 \qquad \hat{R}(10)_{KLR} = \frac{60,91}{85,01} = 0,7153$$

$$\hat{R}(10)_{PKO} = \frac{43,52}{55,96} = 0,7777$$

Stopy zwrotu spółek AMC, ELE, IRE, WST są ujemne. Oznacza to, że ich akcje nie gwarantują dochodu inwestorom. Tym samym „wypadają z listy" interesujących spółek. Nie uwzględniono ich w ocenie niezawodności. Ostatecznie do dalszej rozważań na temat optymalnego doboru spółek przeszły spółki mające najwyższe stopy zwrotu: KLR, TFM, PKO.

W kolejnym etapie procesu optymalizacyjnego ustalono dla wybranych spółek zmodyfikowane współczynniki zmienności z dziesięciu okresów [*Wz* (*m*)]. Modyfikacja współczynników zmienności polega na odpowiednim przekształceniu współczynnika zmienności s_i/Ri do postaci Ri/s_p
gdzie:
s_i – odchylenie standardowe *i*-tej spółki,
Ri – stopa zwrotu *i*-tej spółki,
s_p – odchylenie standardowe portfela.

Obliczone współczynniki zawiera tabela 2.

Tabela 2
Miesięczne zmodyfikowane współczynniki zmienności stóp zwrotu w okresie badawczym [*Wz* (*m*)] (w %)

Spółki	VII 2007	VIII 2007	IX 2007	X 2007	XI 2007	XII 2007	I 2008	II 2008	III 2008	IV 2008
KLR	–6,38	0,97	1,03	15,80	0,58	0,42	–1,411	0,48	2,39	1,00
TFM	2,94	0,35	–1,27	2,71	0,00	2,14	–11,04	1,14	0,81	–5,56
PKO	1,42	2,31	0,70	– 1,88	21,16	0,88	–0,64	0,75	0,59	1,79

Źródło: Badania własne.

Wykorzystując model Sharpe'a obliczono odchylenie standardowe:

$$s_i = \sqrt{s_i^2} = \sqrt{b_i^2 s_M^2 + se_i^2} \qquad (4)$$

gdzie:
s_i^2 – wariancja i-tego portfela spółki,
b_i – współczynnik β zgodnie z teorią Sharpe'a,
s_M – odchylenie standardowe rynku,
e_i – czynnik losowy.

Odchylenie standardowe portfela akcji wynosi 0,099513275 dla KLR, 0,079498691 dla TFM, 0,059254366 dla PKO. Następnie przeprowadzono analizę korelacji akcji spółek, której celem było określenie współzmienności stóp zwrotu tych akcji (tab. 3).

Tabela 3
Odchylenia standardowe i współczynniki korelacji stóp zwrotu

Spółki	Odchylenie standardowe portfela akcji	Spółki	Współczynniki korelacji (r)
KLR	0,099513275	KLR, PKO	0,558965
TFM	0,079498691	KLR, TFM	0,111711
PKO	0,059254366	PKO, TFM	0,148844

Źródło: Badania własne.

Współczynnik korelacji między KLR a PKO jest wysoki, co świadczy o wysokiej współzmienności. Między KLR i TFM oraz PKO i TFM wartości współczynnika korelacji mają niski poziom, co oznacza słabą współzmienność analizowanych akcji.

Następne działanie polegało na ustaleniu odwrotności zmodyfikowanych współczynników zmienności. W celu maksymalizacji funkcji korzyści reprezentowanej przez funkcje trendu ustalono odwrotności współczynników zmienności. Przedstawiono je w tabeli 4. Odwrotności współczynników zmienności stanowią podstawę optymalizacji portfela akcji.

Proces optymalizacyjny portfela

Zastosowanie metody programowania dynamicznego do rozwiązywania problemów portfelowych na rynku kapitałowym stanowi proponowaną przez autorów procedurę optymalizacji. Metoda ta daje możliwości wprowadzenia uniwersalnych algorytmów do rozwiązywania problemów modelowych, liniowych jak i nieliniowych.

W praktyce gospodarczej inwestorzy podejmują decyzje w warunkach ograniczonych środków i zasobów oraz w warunkach asymetrii informacyjnej. Istotą zagadnienia jest zatem właściwa alokacja środków, czyli wybór najlepszego wariantu działania ze względu na określone kryterium. Jest to typowy obszar podejmowania decyzji optymalnych z punktu widzenia przyjętych kryteriów. W procesach decyzyjnych na rynku kapitałowym na etapie planowania i prognozowania działań przydatne są algorytmy oparte na programowaniu dynamicznym, które jest matematyczną metodą opartą na zasadzie optymalności Bellmana [Bellman 1965, s. 105]. Zgodnie z tą zasadą, optymalność działania osiąga się niezależnie od stanu początkowego i początkowych decyzji. Oznacza to, że późniejsze muszą być optymalne ze względu na stan powstały na skutek pierwszej decyzji. Procedura obliczeń rozpoczyna się od poszukiwania optymalnych wartości dla ostatniego stanu N, a następnie idąc wstecz poszukuje się optymalnego rozwiązania dla stanu $N-1$ (przedostatniego) itd. aż do pierwszego.

Model optymalizacyjny w konwencji programowania dynamicznego ma ogólną postać:

$$\max Z\,(w_1, w_2, ..., w_n) = g_1(w_1) + g(w_2) + ... + g_n(w_n) \tag{5}$$

przy ograniczeniach: $w_1 + w_2 + ... + w_n = k$

gdzie:

$w_1, w_2, ..., w_n$ – zmienne wyrażające ilość środków do realizacji poszczególnych zadań,

$g_1(w_1), g(w_2), ...\ g_n(w_n)$ – funkcje korzyści z zainwestowanych danych środków (w) w te zadania (Z).

Po przekształceniu wzoru (5) model optymalizacyjny wybranego portfela ma postać:

$$\max\,[tx_1 \cdot Owz(m)_i + \ldots + tz_n \cdot Owz(m)n] \tag{6}$$

gdzie:

$i = 1, 2, \ldots$, n $Owz(m) = 1/Wz$ – odwrotność współczynnika zmienności.

Warunkiem ograniczającym jest uwzględnienie sumy akcji rozpatrywanych spółek:

$$\sum_{tx=0}^{1}\sum_{i=1}^{n} tx_i = 1 \tag{7}$$

dla $i = 1, 2, \ldots$, n – liczba spółek stanowiących składniki portfelowego modelu poddanego optymalizacji $tx = 0; 1{,}0$ – suma udziałów akcji spółek w portfelu.

Metoda programowania dynamicznego ma charakter kombinatoryczny. Należy rozdzielić całość środków (tx = 1,0), a ściślej udziałów spółek w portfelu na trzy spółki. Wprowadzono następujące oznaczenia:

$F(Owz(m))_1$ – pierwsza funkcja dochodu odpowiadająca miernikowi efektywności dla KLR.

$F(Owz(m))_2$ – druga funkcja dochodu odpowiadająca miernikowi efektywności dla TFM.

$F(Owz(m))_3$ – trzecia funkcja dochodu odpowiadająca miernikowi efektywności dla PKO.

$$F(Owz(m))_{KLR} = -0{,}51798 + 3{,}190517\ t + 15{,}52243\ t^2 - 9{,}48058\ t^3 \quad (7a)$$

$$F(Owz(m))_{TFM} = -0{,}87376 + 21{,}34864\ t - 35{,}4604\ t^2 + 20{,}98657\ t^3 \quad (7b)$$

$$F(Owz(m))_{PKO} = -0{,}89935 + 18{,}4307\ t - 36{,}0019\ t^2 + 23{,}97332\ t^3 \quad (7c)$$

Dane ze wzorów 7a, b, c posłużyły do konstrukcji tabeli 4.

Tabela 4
Odwrotności współczynników zmienności

Spółki	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
KLR	–0,1567	1,03093	0,97087	0,06329	1,72414	2,3810	–0,7092	2,0833	0,4184	1,000
TFM	0,34014	2,85714	–0,7874	0,36900	0,0000	0,4673	–0,0906	0,0877	1,2346	–0,180
PKO	0,70423	0,43290	1,42857	–0,5319	0,04726	1,1369	–1,5625	1,3333	1,6949	0,5387
KLR (wartość skumulowana)	–0,1567	0,87419	1,84506	1,90835	3,63249	6,0135	5,3043	7,3876	7,8606	8,8060
TFM (wartość skumulowana)	0,34014	3,19728	2,82828	3,15728	3,15728	3,66458	3,5739	4,4572	5,6875	5,5059
PKO (wartość skumulowana)	0,70423	1,13719	2,5657	2,03379	2,08105	3,21741	1,6549	2,9881	4,6831	5,2218

Źródło: Opracowanie własne na podstawie funkcji (wzory 7a, b, c).

Konstruując portfel instrumentów finansowych (głównie akcji) założono, że stopy zwrotu mają rozkład normalny. Zwykle jednak nie ma pewności, że jest to taki rozkład. Może on mieć bowiem asymetrię istotną w procesach optymalizacji. Aby stwierdzić czy jest to rozkład normalny obliczono miarę koncentracji K. Rozkład jest normalny jeżeli $K = 0$

$$K = \left\{ \frac{n \cdot (n+1)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^4}{S^4} \right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-1) \cdot (n-3)} \tag{8}$$

Formuła (8) jest jedną z wielu procedur badania zgodności rozkładu z rozkładem normalnym. Można w tym obszarze stosować na przykład testy: χ^2, Kołmogorowa-Smirnowa, a przede wszystkim Shapiro-Wilka. W prowadzonym badaniu zastosowano metodę opartą na analizie asymetrii.

Dla inwestora ważne jest jaki kierunek odchylenia od modelu przyjmuje asymetria. Korzystniejsza jest prawostronna oznaczająca większe prawdopodobieństwo stopy zwrotu, wyższej niż przeciętna. Asymetrię można obliczyć ze wzoru:

$$A = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^3}{S_p^3} \tag{9}$$

gdzie:
A – współczynnik asymetrii,
n – liczba obserwacji miesięcznych stóp zwrotu (w naszym przykładzie 10),
x_j – j-ta miesięczna stopa zwrotu akcji i-tego portfela danej spółki,
$\overline{x}$ – średnia miesięczna stopa zwrotu,
S_p – odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela.

Współczynnik A obliczono dla poszczególnych spółek. Dla spółki KLR:

$$A_{KLR} = \frac{10}{(10-1)(10-2)} \cdot \frac{-0,000070379}{0,4009854692} = -0,00099$$

Wynik ten wskazuje niewielką asymetrię lewostronną. Jest ona niekorzystna dla inwestora, oznacza bowiem większe prawdopodobieństwo osiągnięcia niższej stopy zwrotu niż przeciętna. Dla pozostałych spółek natomiast wyniki są następujące:
A_{TFM} = 1,519 oraz A_{PKO} = 0,130.

Oznacza to, że spółki TFM oraz PKO wykazują asymetrię prawostronną (TFM wysoką). Obliczone współczynniki wprowadzono do oszacowanych funkcji $Owz(m)$ w postaci iloczynu $F(Owz(m))\cdot(1 + A)$. Wartości funkcji trendu zawarto w tabelach 5 i 6.

Tabela 5
Wartości oszacowanych modeli trendu skorygowane wskaźnikiem asymetrii

Oszacowane modele trendu uwzględniające asymetrię	
KLR_A	$[-0{,}51798 + 3{,}190517\,t + 15{,}52243\,t^2 - 9{,}48058\,t^3]\,(1 - 0{,}001)$
TFM_A	$[-0{,}87376 + 21{,}34864\,t - 35{,}4604\,t^2 + 20{,}98658\,t^3]\,(1 + 1{,}52)$
PKO_A	$[-0{,}89935 + 18{,}4307\,t - 36{,}0019\,t^2 + 23{,}97332\,t^3]\,(1 + 0{,}13)$

Źródło: Opracowanie własne.

W tabeli 5 ujęto równania 7a, b, c (w nawiasach kwadratowych). Zmodyfikowano je wskaźnikiem asymetrii (1 + *A*). Wielkości te stanowią podstawę obliczenia wartości współczynnika zmienności $Owz(m)\cdot(1 + A)$.

Tabela 6
Wartości funkcji trendu spółek z uwzględnieniem asymetrii *A*

tx / Spółki	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$Owz(m_1)$ (1 + A)	0	–0,0532	0,6651	1,5802	2,6356	3,7728	4,9366	6,0695	7,1147	8,0153	8,7143
$Owz(m_2)$ (1 + A)	0	0,9275	2,1454	2,9060	3,3351	3,5588	3,7028	3,8931	4,2556	4,9163	6,0099
$Owz(m_3)$ (1 + A)	0	0,6077	1,5385	2,0369	8,2469	2,3122	2,3767	2,5847	3,0783	4,0133	5,8208

Źródło: Badania własne.

$F_{1,2}(tx)$ – oznacza dochód przy optymalnym rozkładzie środków między dwie spółki (dla $tx = 0{,}2$). Jest on obliczany przy wykorzystaniu formuły (10) zgodnie z metodą programowania dynamicznego:

$$F_{1,2}(tx) = f_1(tx) + f_2(1 - tx) \tag{10}$$

gdzie:
$f_1\,(tx)$ – dochód z pierwszej spółki,
$f_2\,(1 - tx)$ – dochód z drugiej spółki.
$F_{1,2}(0) = F_1(0) + F_2(0{,}2) = 0{,}0 + 5{,}40652 = 5{,}40652$
$F_{1,2}(0{,}1) = F_1(0{,}1) + F_2(0{,}1) = 0{,}05314 + 2{,}3373 = 2{,}39044$
$F_{1,2}(0{,}2) = F_1(0{,}2) + F_2(0) = 0{,}66108 + 0{,}0 = 0{,}66108$
Stąd max {5,40652; 2,39044; 0,66108} = 5,40652

Uwzględniając powyższe, rozdział „środków” jest następujący: TFM otrzymuje wszystkie „środki”, KLR zero (0,0), co można zapisać następująco: $\left[0{,}2\,\dfrac{1(0{,}0)}{2(0{,}2)}\right]$
W analogiczny sposób przeprowadzono obliczenia dla pozostałych *tx*. W etapie pierwszym uzyskuje się max *F(tx)* = 0,0; 2,3373 dla *tx* = 0; 0,1 co prowadzi do optymalnego podziału „środków”: KLR →0,0, a TFM →0,1.

Następnie przeanalizowano następny rozdział „środków”: tx = 0, 3 dla t = 0,1; 0,2; 0,3.

0,3 → f_1 (0) + f_2 (0,3) = 0 + 7,3232 = 7,3232
f_1 (0,1) + f_2(0,2) = 0,05314 + 5,40652 = 5,45966
f_1 (0,2) + f_2(0,1) = 0,66108 + 2,3373 = 2,99838
f_1 (0,3) + f_2(0) = 1,57864 + 0 = 1,57864
max $F_{1,2}$(0,3) = 7,3232 $\left(0{,}3\frac{1(0{,}0)}{2(0{,}3)}\right)$ itd. (do 1,0).

W drugim etapie procesu optymalizacji obliczono wartości optymalne dla 3 spółek:

$F_{1,2,3}(tx) = \max\,[F_{1,2}(tx) + f_3(1 - tx)]$.

0,0 → $F_{1,2}$(0) + f_3 (0) = 0 + 0 = 0
0,1 → $F_{1,2}$(0) + f_3(0,1) = 0 + 0,6867 = 0,6867
$F_{1,2}$(0,1) + f_3(0) = 2,3373 + 0 = 2,3373
max = 2,3373 $\left(0{,}1\frac{1(0{,}0)2(0{,}1)}{3(0{,}0)}\right)$.

Oznacza to, że wszystkie „środki” (0,1) przydzielono spółce drugiej.

0,2 → $F_{1,2}$(0) + f_3 (0,2) = 0 + 1,7385 = 1,7385
$F_{1,2}$(0,1) + f_3(0,1) = 2,3373 + 0,6867 = 3,024
$F_{1,2}$(0,2) + f_3(0) = 5,40652 + 0 = 5,40652
0,3 → $F_{1,2}$(0) + f_3(0,3) = 0 + 2,3373 = 2,3373
$F_{1,2}$(0,1) + f_3(0,2) = 2,3373 + 1,7385 = 4,0758
$F_{1,2}$(0,2) + f_3(0,1) = 5,4065 + 0,6867 = 6,0932
$F_{1,2}$(0,3) + f_3(0) = 7,3232 + 0 = 7,3232
0,4 → $F_{1,2}$(0) + f_3(0,4) = 0 + 2,539 = 2,539
$F_{1,2}$(0,1) + f_3(0,3) = 2,3373 + 2,3373 = 4,6391
$F_{1,2}$(0,2) + f_3(0,2) = 5,4065 + 1,7385 = 7,145
$F_{1,2}$(0,3) + f_3(0,1) = 7,3232 + 0,6867 = 8,0099
$F_{1,2}$(0,4) + f_3(0) = 8,4046 + 0 = 8,4046
0,5 → $F_{1,2}$(0) + f_3(0,5) = 0 + 2,6128 = 2,6128
$F_{1,2}$(0,1) + f_3(0,4) = 3,3373 + 2,539 = 5,8763
$F_{1,2}$(0,2) + f_3(0,3) = 5,4065 + 2,3373 = 7,7083
$F_{1,2}$(0,3) + f_3(0,2) = 7,3232 + 1,7385 = 9,0617 itd. (do 1,0).

Wyniki optymalizacji czyli maksymalizacji miernika efektywności $Owz(m)\cdot(1 + A)$ przedstawiono w tabeli 7.

Tabela 7
Rezultaty optymalizacji modelu z uwzględnieniem współczynnika asymetrii

Rozdział „środków”	$F_{1,2}(tx)$	$F_{1,2,3}(tx)$	KLR oraz TFM	KLR, TFM, PKO
0	0,0	0,0	0,0; 0,0	0,0 ; 0,0; 0,0
0,1	2,3373	2,3373	0; 0,1	0; 0,1; 0
0,2	5,4065	5,4065	0; 0,2	0; 0,2; 0
0,3	7,3232	7,3232	0; 0,3	0; 0,3; 0
0,4	8,4046	8,4046	0; 0,4	0; 0,4; 0
0,5	8,9681	9,0913	0; 0,5	0; 0,5; 0
0,6	9,3310	10,1431	0; 0,6	0; 0,6; 0
0,7	9,9833	10,0176	0,3; 0,4	0; 0,6; 0,1
0,8	11,0922	11,9436	0,5; 0,3	0; 0,5; 0,3
0,9	12,2549	12,2549	0,6; 0,3	0; 0,9; 0
1,0	15,1221	15,1221	0; 1,0	0; 1,0; 0

Źródło: Opracowanie własne.

Maksymalny dochód liczony wartościami mierników $Owz(m)\cdot(1 + A)$ otrzymuje się przy następującej strukturze udziałów: udział spółki KLR w portfelu powinien wynosić 0, spółki TFM – 1, spółki PKO – 0. Przy takiej strukturze udziałów wartość optymalna oczekiwanej stopy zwrotu z portfela wynosi:

$R_p = 8{,}79 \cdot 0 + 4{,}05 \cdot 1 + 3{,}11 \cdot 0 = 4{,}05$

Ostateczny rezultat optymalizacji wyrażony stopą zwrotu portfela i odchyleniem standardowym przy tej strukturze wynosi:

$R^*_p = 4{,}05\%$ oraz $s^*_p = 7{,}95\%$

Ryzyko portfela

W szacowaniu ryzyka portfela wykorzystuje się wskaźnik[2]:

$Owz(m) \cdot (1+A)$

Dla wartości optymalnej wskaźnik ten wynosi:

$$Owz(m) \cdot (1+A) = \frac{4{,}05}{7{,}95}\ (1 + 1{,}519) = \frac{10{,}202}{7{,}95}$$

Ostatecznie wskaźnik jakości, czyli współczynnik zmienności, przyjmuje wartość:

$$wz(m) = \frac{7{,}95}{10{,}202} = 0{,}7792 = 77{,}92\%$$

[2] Zawiślak R., Tymiński M., *A concept of using a dynamic programic method…*

W przypadku krótkiej sprzedaży proces optymalizacji na tym się nie kończy. Dalsza procedura optymalizacyjna wiąże się z określeniem maksymalnej wartości kombinacji:

$Owz(m) \cdot (1 + A)$ przy tx = 1,01; 1,02; 1,03; … itd. dla spółek KLR, TFM, PKO.

Równocześnie trzeba ocenić s_p oraz określić minimalne ryzyko wyrażone wariancją MVP (Minimum Variance Portfolio).

Wykorzystując formuły określające wagi dla akcji tworzących portfel:

$$w_1 = (s_2^2 - s_1 s_2 \cdot x_{1,2}) : (s_1^2 + s_2^2 - 2\, s_1 s_2 \cdot x_{1,2}) \qquad (11)$$

$$w_2 = (s_2^2 - s_1 s_2 \cdot x_{1,2}) : (s_1^2 + s_2^2 - 2\, s_1 s_2 \cdot x_{1,2}) \qquad (12)$$

wybrano akcję mającą najniższą wartość miernika $Owz(m) \cdot (1 + A)$. Jest nią akcja spółki PKO. Wartość stopy zwrotu tych akcji wynosi 3,118 %. Stąd odchylenie standardowe wynosi:

$$Owz(m) \cdot (1+A) = \frac{R_{PKO}}{s_{pPKO}} (1 + 0{,}13) = \frac{3{,}118}{5{,}93} \cdot 1{,}13 = \frac{3{,}523}{5{,}93}$$

$$Wz(m) = \frac{5{,}93}{3{,}523} = 168{,}3\%$$

Współczynnik korelacji dla akcji TFM i PKO wynosi 0,148844 (tab. 8). Wykorzystując zależność odchylenia standardowego i współczynnika korelacji

$$x_{TFM} / x_{PKO} > x_{TFM,PKO} \qquad (13)$$

otrzymano 7,95/5,93 = 1,3406 > 0,148844. Wartości relacji wskazują, że portfel o minimalnym ryzyku osiągany jest dla nieujemnych udziałów w portfelu. Podstawiając wielkości otrzymane do zależności (11), otrzymano wielkość wyrażającą udział spółki PKO:

w_1(PKO) = $(0{,}0795^2 - 0{,}0795 \cdot 0{,}0593 \cdot 0{,}148844) : (0{,}0593^2 + 0{,}0795^2 - 2 \cdot 0{,}0593 \cdot 0{,}0795 \cdot 0{,}148844) = 0{,}0007016 : 0{,}008433 = 0{,}0832$

Tabela 8

Parametry akcji TFM i PKO

Spółka	TFM	PKO
Stopy zwrotu	4,05%	3,11%
Odchylenia standardowe	7,95%	5,93%
Współczynnik korelacji TFM – PKO	0,148844	0,148844

Źródło: Obliczenia własne.

Udział spółki PKO powinien być równy około 0,083, a TFM – około 0,917. Ostatecznie skład portfela minimalnego ryzyka powinien być następujący:

$R_p = 0{,}917 \cdot 4{,}05 + 0{,}083 \cdot 3{,}11 = 3{,}97\%$

$s_p = 0{,}917 \cdot 7{,}95 + 0{,}083 \cdot 5{,}93 = 7{,}78\%$

Reasumując – procedura zaproponowana w artykule daje portfel z krótką sprzedażą, maksymalizuje oczekiwany dochód i mimo że nie gwarantuje wprost portfela minimalnego ryzyka, to jednak może być interesującą propozycją dla inwestora, pozwala bowiem ocenić stopień realności osiągnięcia otrzymanych wyników spełniających kryteria optymalności. Dla porównania, zastosowanie procedury optymalizacyjnej portfela metodą „tradycyjną"[3] daje portfel o minimalnym ryzyku. Uwzględnia co prawda maksymalizację zysku przy danym ryzyku lub minimalizację ryzyka przy założonym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu, ale nie weryfikuje realności osiągnięcia otrzymanego wyniku. Tymczasem optymalny portfel otrzymany metodą programowania kwadratowego ma skład następujący: –1,0957 (ELE) + 1,0316 (KLR) + 0,4192 (PKO) + 0,6449 (TFM). Znak minus dotyczy sprzedaży krótkiej. Rozwiązanie to jednak nie zapewnia trwałości modelu nawet w średnim okresie prognozy.

Wnioski

Zaproponowana dwukryterialna koncepcja służy budowie portfela inwestycyjnego i jego optymalizacji. Początkowym etapem jest wstępna selekcja spółek będących podstawą konstrukcji portfela papierów wartościowych. Przeprowadzone rozważania pozwalają sformułować następujące wnioski:

1. Zaproponowana koncepcja optymalizacji portfela inwestycyjnego wykorzystuje programowanie dynamiczne oraz elementy teorii niezawodności. Umożliwia wprowadzenie krótkiej sprzedaży oraz wyboru portfela o minimalnym ryzyku przy równoczesnej możliwej maksymalizacji dochodu.
2. Wykorzystanie funkcji trendu zmodyfikowanych współczynników zmienności uwzględnia tendencje kształtowania się w czasie tych mierników w zoptymalizowanym portfelu inwestycyjnym.
3. Wybór instrumentów finansowych do portfela na podstawie elementów teorii niezawodności powoduje względną trwałość zoptymalizowanego portfela, co może być istotne dla inwestora w aspekcie korzyści osiąganych z portfela inwestycyjnego.

---

[3] Przy wykorzystaniu programowania kwadratowego z uwzględnieniem funkcji Lagrange'a. Więcej na temat programowania kwadratowego: Haugen R., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, Wyd. WIG PRESS, Warszawa 1996; Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe. Ryzyko finansowe*, PWN, Warszawa 1998.

Literatura

BELLMAN R., *Adaptacyjne procesy sterowania*. PWN, Warszawa 1965.

HAUGEN R., *Teoria nowoczesnego inwestowania*. Wyd. WIG PRESS, Warszawa 1996.

JAJUGA K., JAJUGA T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe. Ryzyko finansowe.* PWN, Warszawa 1998.

TARCZYŃSKI W. *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe.* Placet, Warszawa 1997.

TYMIŃSKI J., ZAWIŚLAK R., *Dwukryterialna koncepcja wyboru instrumentów finansowych dla efektywnej konstrukcji portfela i jego optymalizacja na rynku kapitałowym*. Wyd. Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2008.

TYMIŃSKI J., ZAWIŚLAK R., *Wykorzystanie elementów teorii sterowania w problemie optymalizacji portfela inwestycyjnego na rynku kapitałowym*. Wyd. Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2009.

TYMIŃSKI J., *Elementy teorii niezawodności obiektów mieszkaniowych*. Zeszyty Naukowe nr I, Kutno 2001.

ZAWIŚLAK R., TYMIŃSKI M. *A concept of using a dynamic programic method to optimize an investment portfolio taking into account a short sale option and the construction of a minimum risk portfolio.* Wyd. Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2010.

Bicriterion concept of building an investment portfolio by dynamic programming methods

Abstract

This paper presents a new concept of portfolio optimization shares in the capital market. The main purpose this concept is bicriterion function – which maximized financial revenue and minimized the risk of the investment portfolio.

The presented optimization algorithm uses elements of reliability theory and the method of dynamic programming. From an investor point of view it is important to assess the possibility of achieving the desired level of income maximum and minimizing risk. The proposed concept of the investment portfolio to such an assessment.