Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego
Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej nr 123 (2018), 69–79
DOI 10.22630/EIOGZ.2018.123.22

***Marek Andrzej Kociński***

Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

# O wykorzystaniu modelu dwumianowego do optymalizacji strategii sprzedaży zboża

**Abstrakt:** W artykule rozważany jest problem optymalnego wyboru momentu sprzedaży zboża w sytuacji, w której występuje koszt jego magazynowania i występuje zmienność procesu ceny ziarna. Do rozwiązania zagadnienia maksymalizacji różnicy między kwotą uzyskaną za sprzedaż ziarna a kosztem jego przechowywania użyto modelu dwumianowego, którym można opisywać dynamikę ceny zboża. Wyniki teoretyczne artykułu zostały zastosowane do obliczeń numerycznych. W przypadku optymalizacji sprzedaży zboża strategia, w której moment sprzedaży jest losowy, może być istotnie lepsza od strategii z deterministycznym czasem sprzedaży.

**Słowa kluczowe:** optymalny moment stopu, model dwumianowy, koszt magazynowania ziarna
**Kody JEL:** C6, Q140

## Wstęp

Zboża są ważną grupą roślin uprawnych. Są one surowcem rolnym mającym strategiczne znaczenie w zapewnianiu bezpieczeństwa żywnościowego państw Unii Europejskiej. Szczególne miejsce wśród zbóż zajmuje pszenica, która jest typowym zbożem uprawianym w klimacie umiarkowanym. Kształtowanie się cen rynkowych cen ziarna jest uwarunkowane różnorakimi przyczynami, nie tylko ekonomicznymi. Istotnym aspektem rynków zbożowych jest występowanie znaczących zmian cen. Wynika ona ze zmienności zarówno popytu, jak i podaży. Podaż podlega wahaniom na przykład z powodu zmian pogodowych, w przypadku popytu występuje

Marek Andrzej Kociński https://orcid.org/0000-0002-7669-6652
marek_kocinski@sggw.pl, SGGW, WZIM, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa

zaś zmienność sezonowa. Ponadto ceny na rynku zbóż w Polsce wykazywały silne reakcje na sytuację na rynkach europejskich i światowych [Ginter i Szarek 2010]. Ważnym elementem rynku zbóż w Polsce jest skup interwencyjny. Wydaje się jednak, że cena interwencyjna skupu zbóż nie odgrywa istotnej roli w kształtowaniu się ich cen rynkowych [Ginter i Szarek 2010]. Producent zbóż planując uprawy na dany sezon, narażony jest na ryzyko rynkowe spowodowane niepewnością co do ceny ziarna w okresie jego zbioru. Gdy zboże jest już zebrane, ryzyko dalszych fluktuacji jego ceny jest istotne w przypadku zagadnienia wyboru optymalnego momentu sprzedaży ziarna. W okresie żniw cena zboża może być niska na skutek dużej ilości tego towaru na rynku. Można przypuszczać, że z upływem czasu zmniejszanie się zapasów ziarna będzie czynnikiem indukującym wzrost rynkowej ceny zboża. Spodziewany, odpowiednio duży, wzrost ceny zboża jest przesłanką sugerującą jego przechowywanie, które jest alternatywą do zaangażowania w rynek kontraktów *futures*. Magazynowanie zboża jest przedsięwzięciem złożonym i narażonym na ryzyko zmniejszenia jakości ziarna na przykład poprzez nawilżenie. Istotna podczas przechowywania ziarna jest kontrola jego wilgotności i temperatury [Górnicki i Kaleta 2008]. W magazynach do przechowywania zboża zachodzą procesy wpływające na jego właściwości fizyczne i skład chemiczny. Właściwa ochrona ziarna przed wodą gruntową, deszczem, gryzoniami i insektami jest istotną kwestią. Nieprawidłowe przechowywanie zboża może skutkować pogorszeniem jego wartości użytkowej. Koszt magazynowania (wraz z ubezpieczeniem) ziarna może być zatem istotnym czynnikiem wpływającym na decyzję o jego przechowywaniu. Zagadnienie wyboru strategii magazynowania zboża było już badane [Kastens i Dhuyvetter 1999, Lai i in. 2003].

Celem pracy jest wyznaczenie strategii sprzedaży zboża, która maksymalizuje różnicę między kwotą uzyskaną za sprzedaż ziarna a kosztem jego przechowywania.

## Opis zagadnienia

W modelu rozważanym w pracy do parametrów mających znaczenie przy wyborze optymalnego momentu sprzedaży zboża należą prognozowany trend zmiany jego ceny i koszt przechowywania ziarna. Ponadto ważna jest tu również ilościowa miara ryzyka na rynku. Niech $C_t$ oznacza cenę tony zboża w chwili $t$. Stopa zwrotu $R$ i logarytmiczna stopa zwrotu $R^{\ln}$ z ceny zboża w okresie między $t$ a $t + \Delta t$, gdzie $t \geq 0$, dane są następująco:

$$R = \frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t},$$

$$R = \ln\left(\frac{C_{t+\Delta t}}{C_t}\right).$$

Miarą ryzyka rynkowego może być zmienność występujących na nim stóp zwrotu, a miarami tej zmienności mogą być wariancja i odchylenie standardowe stóp zwrotu, które wykorzystywane są w modelowaniu rynków finansowych. Analizę zmienności cen pszenicy można znaleźć na przykład w artykułach: [Borkowski i Krawiec 2010, Hamulczuk i Klimkowski 2011, Jerzak i Florek 2013]. Oprócz parametrów procesu ceny zboża na wybór czasu sprzedaży ziarna może wpłynąć również nastawienie uczestnika rynku zbożowego do ryzyka, które może być wyrażone za pomocą tak zwanej funkcji użyteczności.

W rozważanym modelu z czasem dyskretnym proces stochastyczny rynkowej ceny zboża jest ciągiem zmiennych losowych $\{C_n\}_{n=0,\ldots,N}$ na przestrzeni probabilistycznej ($\Omega$, $F$, $P$), w której $\Omega$ jest zbiorem zdarzeń elementarnych, który w rozważanym modelu może być interpretowany jako zbiór opisów trajektorii procesu rynkowych cen zboża od chwili 0 do $T$. Zbiór $F$ jest $\sigma$-ciałem podzbiorów zbioru $\Omega$ opisującym zdarzenia losowe, a w opisywanym modelu jest zbiorem składającym się ze zdarzeń losowych, które mogą wystąpić na rynku zbożowym i którym można przypisać prawdopodobieństwo określone funkcją $P$. W rozważanym modelu zakłada się, że $F$ składa się ze wszystkich podzbiorów $\Omega$.

Ponadto dana jest filtracja $\{F_n\}_{n=0,\ldots,N}$, gdzie $F_n$ jest najmniejszym $\sigma$-ciałem, względem którego cena $C_n$ jest mierzalna jako funkcja określona na $\Omega$ (najmniejszym $\sigma$-ciałem wymaganym, aby określać cenę $C_n$ zmienną losową dla $\Omega$). Każde z rozważanych $\sigma$-ciał $F_n$ można interpretować jako rodzinę zdarzeń na rynku, o których wiadomo, czy zaszły, czy nie, jeżeli rynek obserwowany jest od chwili 0 do $n$.

Strategia sprzedaży zboża maksymalizująca różnicę między kwotą uzyskaną za sprzedaż a kosztem przechowywania jest charakteryzowana przez odpowiedni moment sprzedaży zboża. Decyzja uczestnika rynku o sprzedaży zboża w momencie $t$ może zależeć od tego, jakie były wartości jego cen w chwilach 0, …, $n$. Moment sprzedaży zboża jest więc definiowany jest jako zmienna losowa $\tau$ określona na $\Omega$, przy czym $\tau$ jest momentem stopu, co oznacza, że zdarzenie $\{\tau = n\}$ należy do $F_n$. Jest to formalne ujęcie oczywistej uwagi, że sprzedaż zboża w momencie $n$ jest zdarzeniem, o którym w czasie $t$ wiadomo, czy zaszło, czy nie. Niech $\overline{N}$ oznacza zbiór momentów stop o wartościach w zbiorze $\{0, \ldots, N\}$. Ponadto niech $k$ oznacza koszt przechowywania jednej tony zboża w jednostce czasu.

Zagadnienie optymalizacyjne rozważane w niniejszym artykule można opisać jako problem znalezienia momentu stopu $\tau^*$ takiego, że:

$$E\left(C_{t^*} - k\tau^*\right) = \max\left\{E\left(C_\tau\right) - k\tau : \tau \in \overline{N}\right\}$$

## Model dwumianowy a optymalizacja sprzedaży zboża

Do rozwiązania problemu maksymalizacji różnicy między kwotą uzyskaną za sprzedaż ziarna a kosztem jego przechowywania można wykorzystać ważny model rynku finansowego: model dwumianowy. W modelu tym stopa zwrotu w pojedynczym przedziale czasowym może przyjmować tylko dwie wartości.

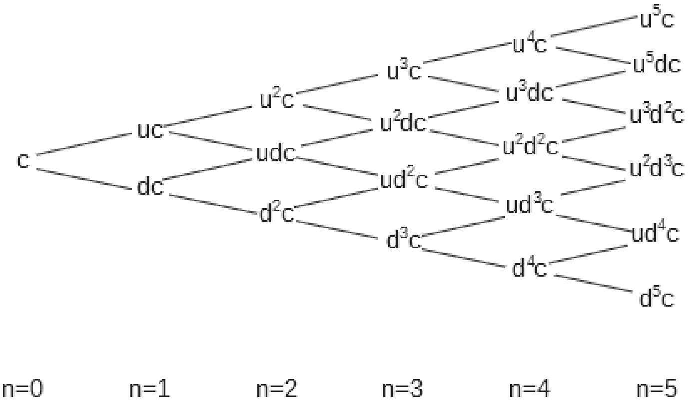
W zastosowaniu modelu dwumianowego w niniejszej pracy do rynku zboża, jeżeli cena zboża $C_n$ w kroku $n$ wynosi $c_n$, to w kroku $n + 1$ może ono kosztować $uc_n$ lub $dc_n$, gdzie $u$ i $d$ są współczynnikami takimi, że $0 < d < u$. Prawdopodobieństwo, że cena zboża w kroku czasowym $n + 1$ wyniesie $uc_n$ pod warunkiem, że cena ta w kroku $n$ równa jest $c_n$ dana jest przez $p$, gdzie $0 < p < 1$.

Zatem zachodzą równości:

$$P\left(C_{n+1} = uc_n \mid C_n = c_n\right) = p = 1 - P\left(C_{n+1} = dc_n \mid C_n = c_n\right).$$

Niech $C_0 = c$.
W kroku $n$ jest $n + 1$ możliwych wartości ceny $C_n$: $cu^0d^n, \ldots, cu^nd^0$.

Graficzny schemat modelu dwumianowego dla pięciu kroków czasowych pokazany jest na rysunku 1.




**Rysunek 1**
Ceny zboża w modelu dwumianowym dla pięciu kroków czasowych
Źródło: Opracowanie własne.

Model dwumianowy wykorzystany został do analizy zmienności rynku zbożowego do analizy *w*pływu metody szacowania zmienności historycznej na przewidywanie ceny zbóż w artykule [Krawiec 2011]. Niech $Y_n$ oznacza wartość różnicy między kwotą uzyskaną za sprzedaż zboża w kroku $n$ a kosztem przechowywania. Czyli, $Y_n = C_n - kn$ dla $n = 0, \ldots, N$.

Niech proces stochastyczny $Z$ będzie określony następująco:

$Z_N = Y_N$,

$$Z_n = \max\left\{Y_n, E\left(Y_{n+1} \mid F_n\right)\right\} \text{ dla } n = 0, \ ..., N-1.$$

Wtedy optymalny moment stopu $\tau^*$ dany jest równością $\tau^* = \min\{n \geq 0 : Z_n = Y_n\}$ [Jakubowski i Sztencel 2001].

Niech $R_n = \dfrac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}}$ dla $n = 1, ..., N$.

W rozważanym modelu dwumianowym stopy zwrotu $R_1, \ldots, R_N$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. W konsekwencji do określenia, czy w danym kroku czasowym $n$ optymalnie jest sprzedać zboże, ceny zboża z kroków poprzedzających $n$ nie są potrzebne. Ponadto $Y_n$ jest funkcją ceny zboża $C_n$ dla $n = 0, \ldots, N$ i jeśli dana jest zmienna $Y_{n+1}$, to zmienna $Y_n$ może być wyznaczona następująco:

$$Z_n\left(C_n\right) = \max\left\{Y_n, E\left(Z_{n+1} \mid C_n\right)\right\} \text{ dla } n = 0, \ ..., N-1.$$

Można więc do wyznaczenia optymalnego momentu sprzedaży zboża wykorzystać funkcję dwóch zmiennych $z$, zdefiniowaną za pomocą procesu $Z$:

$$z\left(n, j\right) = Z_n\left(cu^j d^{n-j}\right)\max\left\{Y_n, E\left(Z_{n+1} \mid C_n\right)\right\} \text{ dla } n = 0, \ ..., N \text{ i } j = 0, \ ..., n.$$

Para $(n, j)$ opisuje stan rynku, w którym wartość kroku czasowego wynosi $n$, a cena zboża równa jest $cu^j d^{n-j}$.

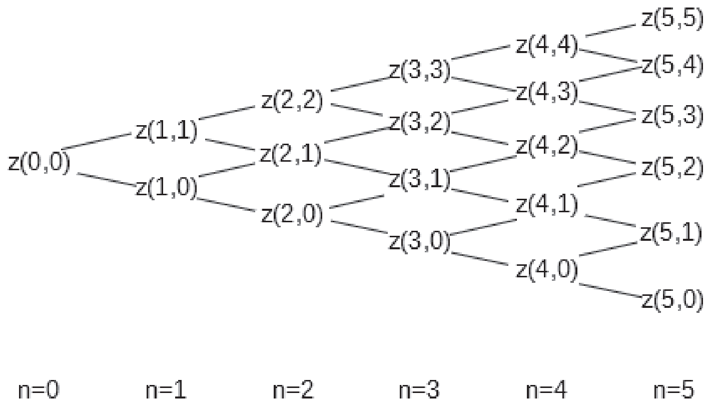
Wartości funkcji $z$ można wyznaczyć indukcyjnie:

$$z\left(N, j\right) = cu^j d^{N-j} - kN \text{ dla } n = 0, \ ..., N \text{ i } j = 0, \ ..., N,$$

$$z\left(n, j\right) = \max\left\{cu^j d^{n-j} - kn, pz\left(n+1, j+1\right) + \left(1-p\right)z\left(n+1, j\right)\right\}$$

dla $n = 0, ..., N$ i $j = 0, ..., n$.

Z definicji funkcji $z$ wynika, że jeśli rynek jest w stanie $(n, j)$, to gdy $n < N$ i $z(n, j) > pz(n + 1, j + 1) + (1 - p)z(n + 1, j)$, to uczestnik rynku maksymalizujący wyrażenie $E(C_\tau - k\tau)$ po momentach stopu ze zbioru $\overline{N}$, podejmuje decyzję o sprzedaży zboża. Jeśli $z(n, j) > pz(n + 1, j + 1) + (1 - p)z(n + 1, j)$, to decyduje się on na dalsze przechowywanie ziarna. Gdy $n = N$, ziarno jest sprzedawane, gdyż ma ono zostać sprzedane do kroku czasowego $N$.




**Rysunek 2**
Wartości funkcji Z w modelu dwumianowym dla pięciu kroków czasowych
Źródło: Opracowanie własne.

## Model dwumianowy a geometryczny ruch Browna

Jednym z procesów stochastycznych wykorzystywanych do modelowania cen akcji na rynku finansowym jest geometryczny ruch Browna. Proces ten wykorzystany został do wyceny opcji w modelu Blacka-Scholesa [Black i Scholes 1973] i do modelowania rynku walutowego [Musiela i Rutkowski 2005]. Geometryczny ruch Browna ten może być również używany w modelowaniu cen zboża i wtedy cena $C_t$ dana jest równaniem:

$$C_t = c\exp\left(at + \sigma W_t\right),$$

gdzie $\alpha$ jest zbioru liczb rzeczywistych, $\sigma$ jest dodatnie, a $W_t$ oznacza wartość procesu Wienera w czasie $t$, który otrzymuje się jako proces graniczny dla tak zwanego błądzenia losowego w czasie dyskretnym. Procentowa zmiana w geometrycznym ruchu Browna, licząc od ustalonego momentu $t$, nie zależy od jego wartości w czasie $t$ i chwilach wcześniejszych. Ponadto, gdy proces ceny $\{C_t\}_{t\geq 0}$ jest modelowany za pomocą geometrycznego ruchu Browna, to logarytmiczna stop zwrotu w okresie od $t$ do $t + \Delta t$: $\ln\left(\frac{C_{t+\Delta t}}{C_t}\right)$ dana jest ma rozkład normalny o średniej $\alpha\Delta t$ i wariancji $\sigma^2\Delta t$. Choć normalność rozkładu logarytmicznej stopy zwrotu ceny zboża może być kwestionowana [Krawiec 2008], to wydaje się, że model Blacka-Scholesa może być użyteczny jako przybliżenie empirycznie obserwowanej dynamiki cen na rynku zboża. Geometryczny ruch Browna jest procesem stochastycznym w czasie ciągłym. Może być jednak dobrze przybliżany przez model dwumianowy, jeżeli odstęp czasu między kolejnymi momentami możliwości handlu na rynku w modelu dwumianowym jest odpowiednio mały. Niech $C_n$ oznacza cenę zboża w chwili $n\Delta t$ (jeżeli jednostką czasu w modelu jest jeden rok i w ciągu tygodnia cena zboża jest notowana od poniedziałku do piątku, to można w praktyce stosować równość $\Delta t = \frac{1}{250}$). Łatwo zauważyć, że $\alpha$ oznacza oczekiwaną logarytmiczną stopę zwrotu okresie jednostkowym, a $\sigma^2$ symbolizuje wariancję logarytmicznej stopy zwrotu w okresie jednostkowym. Wartość oczekiwana ceny $C_t$ dana jest równością $E(C_t) = c\exp\left(at + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$. Parametry $\alpha$ i $\sigma^2$ mogą być oszacowane na podstawie historycznych notowań cen zbóż lub prognozy przyszłej dynamiki ceny zboża.

Niech $m(T)$ będzie określone następująco:

$$m(T) = \frac{E(C_t) - c}{c}.$$

Wartość $m(T)$ jest oczekiwaną, relatywną zmianą ceny zboża między chwilą 0 a momentem $t$ i zachodzi $m(T) = \exp\left(aT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right) - 1$. Stąd wartość $\alpha$ dana jest formułą:

$$a = \frac{1}{T}\left(\ln\left(m(T) + 1\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}\right).$$

W rozważanym w pracy modelu dwumianowym $T = \Delta tN$ i wtedy:

$$a = \frac{1}{\Delta tN}\left(\ln(m(T) + 1) - \frac{\sigma^2 \Delta tN}{2}\right).$$

Parametry modelu dwumianowego aproksymującego geometryczny ruch Browna można uzyskać, przyrównując wartości oczekiwane logarytmicznej stopy zwrotu i kwadratu logarytmicznej stopy zwrotu z modelu dwumianowego, odpowiednio do wartości oczekiwanej logarytmicznej stopy zwrotu i kwadratu logarytmicznej stopy zwrotu w modelu, w którym cena akcji opisywana jest przez geometryczny ruch Browna w takim samym czasie. W rozważanym modelu dyskretnym w okresie między krokami czasowymi $n$ a $n + 1$ logarytmiczna oczekiwana stopa zwrotu wynosi $p\ln(u) + (1 - p)\ln(d)$, a oczekiwana wartość kwadratu logarytmicznej stopy zwrotu równa jest $p\ln^2(u) + (1 - p)\ln^2(d)$. Zatem biorąc pod uwagę wartość oczekiwaną i wariancję logarytmicznej stopy zwrotu w okresie od $t$ do $t + \Delta t$, dla procesu $C_t$ otrzymuje się następujące równości:

$$p\ln(u) + (1 - p)\ln(d) = a\Delta t,$$

$$p \ln^2(u) + (1-p)\ln^2(d) = a^2(\Delta t)^2 + \sigma^2 \Delta t.$$

Do wyznaczenia wartości $p$, $u$ oraz $d$ dany jest zatem układ dwóch równań, którego rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Rozwiązanie tego układu zastosowane w przykładzie numerycznym opisanym w pracy jest następujące:

$$p = \frac{1}{2},$$

$$u = \exp(a\Delta t + \sigma^2 \Delta t),$$

$$d = \exp(a\Delta t - \sigma^2 \Delta t).$$

## Przykład numeryczny

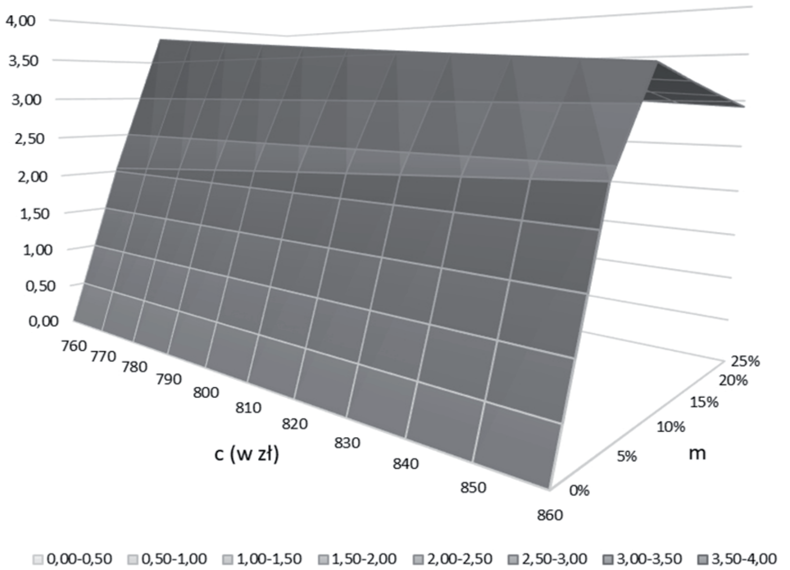
W pokazanym tu przykładzie założono, że zmienność ceny ziarna wynosi 20%, a miesięczny koszt magazynowania 1 tony ziarna równy jest 20 zł. Dany jest uczestnik rynku, który optymalizuje czas sprzedaży zboża w ciągu trzech miesięcy ($N = 75$). Wartości maksymalnej różnicy między kwotą uzyskaną za sprzedaż ziarna a kosztem jego przechowywania dla różnych wartości prognoz $m(T)$ ceny początkowej $c$ tony ziarna zawiera tabela 1, a tabela 2 pokazuje procentowo przewagę strategii wykorzystującej optymalne stopowanie nad strategią deterministyczną (tzn. taką, która nie zależy od zmian ceny zboża w czasie i w której moment sprzedaży zboża wyznaczony jest już w chwili 0).

**Tabela 1**
Wartości maksymalnej różnicy między ceną sprzedaży tony ziarna a kosztem jej przechowania do czasu sprzedaży

| | | *m*(*T*) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0% | 5% | 10% | 15% | 20% | 25% |
| *c* [zł] | 760 | 760,00 | 775,50 | 813,50 | 851,50 | 889,50 | 927,50 |
| | 770 | 770,00 | 786,00 | 824,50 | 863,00 | 901,50 | 940,00 |
| | 780 | 780,00 | 796,50 | 835,50 | 874,50 | 913,50 | 952,50 |
| | 790 | 790,00 | 807,00 | 846,50 | 886,00 | 925,50 | 965,00 |
| | 800 | 800,00 | 817,50 | 857,50 | 897,50 | 937,50 | 977,50 |
| | 810 | 810,00 | 828,00 | 868,50 | 909,00 | 949,50 | 990,00 |
| | 820 | 820,00 | 838,50 | 879,50 | 920,50 | 961,50 | 1002,50 |
| | 830 | 830,00 | 849,00 | 890,50 | 932,00 | 973,50 | 1015,00 |
| | 840 | 840,00 | 859,50 | 901,50 | 943,50 | 985,50 | 1027,50 |
| | 850 | 850,00 | 870,00 | 912,50 | 955,00 | 997,50 | 1040,00 |
| | 860 | 860,00 | 880,50 | 923,50 | 966,50 | 1009,50 | 1052,50 |

**Tabela 2**
Względne (procentowe) powiększenie różnicy między ceną sprzedaży tony ziarna a kosztem jej magazynowania w stosunku do strategii deterministycznej w przypadku zastosowania strategii optymalnego stopowania

| | | *m*(*T*) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0% | 5% | 10% | 15% | 20% | 25% |
| *c* [zł] | 760 | 0,00 | 2,04 | 3,83 | 3,65 | 3,49 | 3,34 |
| | 770 | 0,00 | 2,08 | 3,78 | 3,60 | 3,44 | 3,30 |
| | 780 | 0,00 | 2,12 | 3,72 | 3,55 | 3,40 | 3,25 |
| | 790 | 0,00 | 2,15 | 3,67 | 3,50 | 3,35 | 3,21 |
| | 800 | 0,00 | 2,19 | 3,63 | 3,46 | 3,31 | 3,17 |
| | 810 | 0,00 | 2,22 | 3,58 | 3,41 | 3,26 | 3,13 |
| | 820 | 0,00 | 2,26 | 3,53 | 3,37 | 3,22 | 3,08 |
| | 830 | 0,00 | 2,29 | 3,49 | 3,33 | 3,18 | 3,05 |
| | 840 | 0,00 | 2,32 | 3,44 | 3,28 | 3,14 | 3,01 |
| | 850 | 0,00 | 2,35 | 3,40 | 3,24 | 3,10 | 2,97 |
| | 860 | 0,00 | 2,38 | 3,36 | 3,20 | 3,06 | 2,93 |




**Rysunek 3**
Względna przewaga strategii optymalnego stopowania nad strategią deterministyczną dla problemu optymalnego wyboru momentu sprzedaży zboża
Źródło: Opracowanie własne na podstawie tabeli 2.

Dane w tabeli 2 i na rysunku 3 pokazują, że wielkość różnicy między kwotą uzyskaną za sprzedaż ziarna a kosztem jego przechowywania może być istotna. Różnica ta rośnie wraz z relatywnym spadkiem kosztu przechowywania ziarna w stosunku do jego ceny.

## Podsumowanie

W pracy została wyznaczona strategia sprzedaży zboża, która maksymalizuje różnicę między kwotą uzyskaną za sprzedaż zboża a kosztem jego przechowywania. Zastosowanie teorii optymalnego stopowania do zagadnienia wyznaczenia optymalnej strategii sprzedaży zboża może istotnie poprawić zyskowność jego sprzedaży w stosunku do strategii deterministycznej, w której moment sprzedaży jest niezależny od dynamiki rynkowej ceny ziarna. Przykład numeryczny opisany w pracy jest przesłanką, że w przypadku optymalizacji sprzedaży strategii zboża przewaga strategii dynamicznie reagującej na sytuację na rynku zboża nad strategią deterministyczną w istotnym stopniu zależy zarówno od przyrostu średniej ceny ziarna, jak i stosunku kosztu magazynowania ziarna do jego ceny rynkowej.

## Literatura

BLACK F., SCHOLES M., 1973: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637–659, https://doi.org/10.1086/260062

BORKOWSKI B., KRAWIEC, M., 2010: *Modelowanie zmienności cen na rynku zbóż w Polsce*, Roczniki Naukowe Stowarzyszenia Ekonomistów Rolnictwa i Agrobiznesu 12, 39–45.

GINTER A., SZAREK A., 2010: *Sytuacja dochodowa producentów zbóż na przykładzie uprawy pszenicy*, Journal of Agribusiness and Rural Development 4, 29–39.

GÓRNICKI K., KALETA A., 2008: *Bezpieczne przechowywanie ziarna – studium przypadku*, Inżynieria Rolnicza 99, 137–143.

HAMULCZUK M., KLIMKOWSKI M., 2011: *Zmienność cen pszenicy w Unii Europejskiej*, Zeszyty Naukowe SGGW w Warszawie. Problemy Rolnictwa Światowego 11 (26), 4, 77–88.

JAKUBOWSKI J., SZTENCEL R., 2001: *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa.

JERZAK M. A., FLOREK J., 2013: *Zmienność cenowa zbóż i jej wpływ na stabilność cen produktów w podmiotach sektora zbożowego w Polsce*, Zagadnienia Ekonomik Rolnej 336, 67–82.

KASTENS T., DHUYVETTER K., 1999: *Post-Harvest Grain Storing and Hedging with Efficient Futures*, Journal of Agricultural and Resource Economics 24, 482–505.

KRAWIEC M., 2008: *Weryfikacja wybranych założeń modelu Blacka-Scholesa na przykładzie europejskiego rynku zbóż*, Roczniki Naukowe Stowarzyszenia Ekonomistów Rolnictwa i Agrobiznesu 10, 197–202.
KRAWIEC M., 2011: *Analiza wpływu metody szacowania zmienności historycznej na przewidywanie ceny zbóż w modelu dwumianowym*, Roczniki Nauk Rolniczych G, 98, 40–46.
LAI J-Y., MYERS R., HANSON S., 2003: *Optimal On-Farm Grain Storage by Risk-Averse Farmers*, Journal of Agricultural and Resource Economics 28, 558–579.
MUSIELA M., RUTKOWSKI M., 2005: *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlin–Heidelberg, DOI 10.1007/b137866

## On the application of binomial model to optimize the strategy of grain selling

**Abstract:** In the article the problem of the optimal choice of the moment of selling the grain is considered when the grain price is characterized by volatility and there is the costs of storing the grain. To solve the problem of maximizing the difference between the amount obtained for the grain sale and the cost of storing the grain a binomial model was used to describe the dynamics of the grain price. The theoretical results of the paper were applied to the numerical calculations. In the optimization of selling the grain, the strategy with the random selling moment may be significantly better than the strategy with the deterministic selling time.

**Key words:** optimal stopping time, binomial model, grain storage cost
**JEL classification:** C6, Q140

Otrzymano: 3 września 2018 / Zaakceptowano: 28 września 2018
Received: 3 September 2018 / Accepted: 28 September 2018