

KONSTRUKCJA PORTFELI MARKOWITZA I PORTFELI O MINIMALNEJ SEMIWARIANCJI UWZGLĘDNIAJĄCYCH POŚREDNIE I BEZPOŚREDNIE FORMY INWESTOWANIA W TOWARY

*Anna Górska**, *Monika Krawiec***

*Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych
Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Kierownik: prof. dr hab. Henryk Manteuffel

**Katedra Ekonometrii i Statystyki Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Kierownik: dr hab. Zbigniew Binderman, prof. nadzw. SGGW

Słowa kluczowe: model Markowitza, model SEM, pośrednie i bezpośrednie formy inwestowania w towary

Key words: Markowitz model, SEM model, indirect and direct ways of investing in commodities

S y n o p s i s. Inwestowanie w towary stanowi dobrą alternatywę dla inwestycji w instrumenty finansowe. Uwzględnienie towarów w portfelu pozwala osiągać korzyści z jego dywersyfikacji. Jednak uważa się, że udział towarów nie powinien przekraczać 30%. Stąd, celem pracy jest weryfikacja tych wytycznych w warunkach polskiego rynku. W badaniach uwzględniono akcje wybranych spółek, notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, metale szlachetne i towary rolne. Aby wyznaczyć udziały poszczególnych walorów, zastosowano dwa alternatywne podejścia: klasyczny model Markowitza i model SEM, minimalizujący semiwariancję portfela.

WSTĘP

Ryzyko zmiany cen towarów wciąż pozostaje istotnym elementem współczesnych rynków i wpływa zarówno na gospodarki krajów rozwijających się, jak i krajów rozwiniętych. Towar może być przedmiotem handlu na rynkach gotówkowych (*spot*) i terminowych (*futures*), przy czym transakcję może zakończyć fizyczna dostawa towaru lub rozliczenie gotówkowe. To odróżnia rynki towarowe od rynków obligacji i akcji, na których zawierane są wyłącznie transakcje finansowe. Jednak rynki towarowe i finansowe są ze sobą powiązane, czego przykładem mogą być pochodne, dla których instrumentem bazowym są towary i indeksy towarowe.

Wprowadzenie towarów do portfela, złożonego z akcji i obligacji, przynosi wymierne korzyści w postaci efektu dywersyfikacji, przesuującego w górę granicę efektywną [Ge-

man 2007]. Przy tym inwestorzy mają do wyboru pośrednie formy inwestowania w towary (np. zakup akcji firm sektora towarowego) i formy bezpośrednie (np. fizyczny zakup towaru od producenta lub pośrednika). Drewiński [2007] zwraca jednak uwagę, że ograniczaniu ryzyka sprzyja wzrost udziału towarów w portfelu, ale nie więcej niż do 30%. Z kolei Schofield [2007] podaje wyniki badań, przeprowadzonych przez Berclays Capital, których celem było ustalenie optymalnej alokacji towarów w portfelu. W wyniku zastosowania standardowych technik optymalizacji portfela stwierdzono, że modelowy portfel powinien zawierać 25% udział towarów.

Celem pracy jest weryfikacja tych wytycznych w warunkach polskiego rynku. W badaniach uwzględniono akcje wybranych spółek, notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, metale szlachetne i towary rolne. Aby wyznaczyć udziały poszczególnych walorów, zastosowano dwa alternatywne podejścia: klasyczny model Markowitza i model SEM, minimalizujący semiwariancję portfela.

MATERIAŁ EMPIRYCZNY I ZASTOSOWANE MODELE

W niniejszej pracy, podobnie jak w pracy Górskiej i Krawiec [2009], skonstruowano portfele inwestycyjne, w skład których weszły akcje wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, metale szlachetne: złoto i srebro oraz towary rolne: pszenica konsumpcyjna i kukurydza paszowa. Podstawą analiz ilościowych były ceny badanych towarów. Udostępnione na stronie internetowej Ministerstwa Rolnictwa i Rozwoju Wsi ceny pszenicy i kukurydzy były średnimi cenami tygodniowymi, obejmującymi okres od stycznia 2005 do 17 maja 2009 roku (228 obserwacji). W ten sam sposób przekształcono notowania na zamknięcie wybranych akcji oraz ceny metali szlachetnych podawane przez cytowany w *Rzeczpospolitej* serwis www.e-numizmatyka.pl. Były to ceny w USD za uncję kruszcu. Przeliczono je więc na złotówki, uwzględniając oficjalny kurs NBP.

Celem pracy [Górska, Krawiec 2009] była ocena możliwości osiągnięcia korzyści z dywersyfikacji portfela za pomocą dostępnych form inwestowania w towary w warunkach polskiego rynku. Wszystkie walory miały jednakowe udziały, a skład poszczególnych portfeli ustalono arbitralnie. Natomiast w badaniach, których wyniki zaprezentowano w tej części pracy, do ustalenia składu poszczególnych portfeli, wykorzystano dwa alternatywne podejścia: klasyczny model Markowitza i model SEM.

Problem wyznaczenia udziałów walorów w modelu Markowitza [1952] sprowadza się do rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego, jakim jest minimalizacja wariancji stóp zwrotu portfela:

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j k_{ij} \quad (1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i \bar{z}_i \geq \gamma \quad (3)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

gdzie:

s_p^2 – wariancja stóp zwrotu portfela akcji, γ – określona z góry stopa zwrotu dla całego portfela, przy założeniu $\gamma \leq \max \bar{z}_i$, \bar{z}_i – średnia stopa zwrotu i -tego waloru, x_i – udział wartościowy i -tego waloru w portfelu, k_{ij} – kowariancja stóp zwrotu i -tego i j -tego waloru¹.

Model wyboru portfela SEM jest podobny do klasycznego podejścia Markowitza, ale tutaj minimalizowana jest inna miara ryzyka – semiwariancja stopy zwrotu portfela ($ds_p^2(\gamma)$). W przypadku klasycznej wariancji uwzględnia się odchylenia od oczekiwanej stopy zwrotu zarówno „in plus”, jak i „in minus”. Natomiast w przypadku semiwariancji, mamy do czynienia z pojmowaniem ryzyka jako zjawiska negatywnego, dlatego uwzględniamy jedynie ujemne odchylenia od oczekiwanej stopy zwrotu [Jajuga, Jajuga 2005]. W związku z tym, problem wyznaczenia udziałów walorów w modelu SEM sprowadza się do rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego, polegającego na zminimalizowaniu γ -semiwariancji [Rutkowska-Ziaro, Markowski 2007]:

$$ds_p^2(\gamma) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j d_{ij}(\gamma) \quad (5)$$

przy ograniczeniach (2) – (4),

gdzie:

$$d_{ij}(\gamma) = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^m d_{ijt}(\gamma) \quad (6)$$

$$d_{ijt}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_{pt} \geq \gamma \\ (z_{it} - \gamma)(z_{jt} - \gamma) & \text{dla } z_{pt} < \gamma \end{cases} \quad (7)$$

$d_{ijt}(\gamma)$ – semikowariancja od założonej stopy zwrotu, m – liczba jednostek czasowych, w których rejestrowane są stopy zwrotu walorów z_{it} , $t = 1, 2, \dots, m$, z_{pt} – stopa zwrotu portfela w momencie t .

WYNIKI BADAŃ

W badaniach uwzględniono następujące walory: cztery akcje, wchodzące w skład indeksu WIG 20, reprezentujące odmienne branże. Są to: PKN Orlen, PeKaO, TP SA i TVN. W związku z tym, że w składzie indeksu WIG20 nie ma akcji firm przemysłu spożywczego, dokonano doboru akcji spółki uwzględnionej w portfelu branżowego subindeksu WIG-spożywczy. Niestety spółka o największym udziale w portfelu tego indeksu – Kernel, zadebiutowała na Giełdzie dopiero 23.11.2007 roku. Wybrano zatem drugą w kolejności – Kruszwicę. Rozpatrywano także metale szlachetne: złoto i srebro oraz towary rolne: pszenicę konsumpcyjną i kukurydzę paszową. W badaniach pominięto koszty transakcji i koszty posiadania towaru.

W badanym okresie najwyższą oczekiwaną dodatnią tygodniową stopę zwrotu uży-

¹ Kowariancja akcji, np. A i B, to iloczyn odchyleń standardowych akcji A i B oraz współczynnika korelacji między tymi akcjami [Witkowska i in. 2008].

Tabela 1. Udział poszczególnych walorów w portfelach Markowitza i SEM

Gamma	Portfel	PEKAO	TP SA	TVN	PKN_ORLEN	Kruszwica	Złoto	Srebro	Pszenica	Kukurydza
0,00010	M	0,040241	0,161961	0,021342	0,074888	0,073530	0,10536	0,007601	0,299186	0,215891
	SEM	0,00226	0	0,01188	0	0,01154	0	0	0	0,97433
0,00100	M	0,040241	0,161961	0,021342	0,074888	0,073530	0,10536	0,007601	0,299186	0,215891
	SEM	0	0	0,01000	0	0,00595	0	0	0	0,98405
0,00137	M	0,040241	0,161961	0,021342	0,074888	0,073530	0,10536	0,007601	0,299186	0,215891
	SEM	0	0	0,00581	0	0,02979	0	0	0	0,96439
0,00200	M	0,026643	0,108335	0	0,013996	0,104585	0,18034	0,052681	0,282170	0,231249
	SEM	0	0	0	0	0,05166	0,08700	0,00845	0	0,85288
0,00210	M	0,026643	0,108335	0	0,01399	0,104585	0,1803	0,052681	0,282170	0,23124
	SEM	0	0	0	0	0,05443	0,10975	0,02524	0	0,81058
0,00300	M	0	0	0	0	0,132994	0,34059	0,159912	0,158389	0,208118
	SEM	0	0	0	0	0,08016	0,31059	0,17026	0	0,43899
0,00400	M	0	0	0	0	0,103010	0,54315	0,326753	0	0,027092
	SEM	0	0	0	0	0,11846	0,53477	0,32911	0	0,01766
0,00470	M	0	0	0	0	0	0,00034	0,99966	0	0
	SEM	0	0	0	0	0	0,00041	0,99959	0	0

Źródło: obliczenia własne.

skano w przypadku srebra (0,47%), zaś najniższą dla TP SA (0,008%), dlatego założono następujące poziomy γ : 0,0001; 0,001; 0,00137; 0,002; 0,0021; 0,003; 0,004; 0,0047. Następnie dla tych określonych z góry stóp zwrotu dla całego portfela, wyznaczono portfele Markowitza i portfele SEM. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1. Dla wszystkich przyjętych poziomów γ , otrzymano odmienny skład portfeli Markowitza i SEM. Najbardziej zbliżone do siebie (pod względem składu) portfele otrzymano dla najwyższego przyjętego poziomu γ (0,0047). Są to portfele z prawie 100-procentowym udziałem srebra. Bardzo podobny skład portfeli Markowitza i SEM uzyskano również w przypadku $\gamma = 0,004$, w których mamy do czynienia z największym udziałem złota, potem srebra i akcji Kruszwicy. Dla pozostałych poziomów γ otrzymano już całkiem odmienne składy portfeli SEM i Markowitza, lecz można zauważyć, że dla trzech najniższych poziomów γ , portfele Markowitza mają identyczny skład.

W portfelach Markowitza udział walorów, reprezentujących bezpośredni sposób inwestowania w towary waha się od 63%, przy najniższych poziomach γ , do prawie 100% przy poziomach najwyższych. Po uwzględnieniu także pośredniego sposobu inwestowania w towary – akcje spółek związanych z sektorem towarowym – otrzymano udziały od 78 do 100%. Natomiast w przypadku portfeli SEM, udział bezpośrednich form inwestowania waha się od 88% przy γ równym 0,04 do 100% przy γ równym 0,0047.

Odmienne niż w portfelach Markowitza, dla najniższych poziomów γ otrzymano wysokie – ponad 96% udziały walorów reprezentujących

Tabela 2. Wybrane charakterystyki rozkładów stóp zwrotu portfeli w badanym okresie

Gamma	Portfel	Średnia stopa zwrotu	Min	Max	Semiwariancja
0,00010	M	0,00135	-0,06929	0,05365	0,00016
	SEM	0,00170	-0,10685	0,11206	0,00000
0,00100	M	0,00135	-0,06929	0,05365	0,00017
	SEM	0,00171	-0,10737	0,11370	0,00000
0,00137	M	0,00135	-0,06929	0,05365	0,00018
	SEM	0,00174	-0,10724	0,10911	0,00000
0,00200	M	0,00200	-0,07671	0,06063	0,00020
	SEM	0,00200	-0,09224	0,10071	0,00002
0,00210	M	0,00200	-0,07671	0,06063	0,00020
	SEM	0,00210	-0,09007	0,09803	0,00004
0,00300	M	0,00300	-0,11162	0,08402	0,00042
	SEM	0,00300	-0,10000	0,09588	0,00036
0,00400	M	0,00400	-0,16686	0,13200	0,00108
	SEM	0,00400	-0,16901	0,13141	0,00108
0,00470	M	0,00470	-0,17572	0,19471	0,00271
	SEM	0,00470	-0,17572	0,19470	0,00271

Źródło: opracowanie własne.

bezpośrednią formę inwestowania w towary. Najniższy udział towarów w portfelu SEM – 92% uzyskano dla γ równej 0,003. Po uwzględnieniu akcji spółek reprezentujących sektor towarowy, otrzymujemy udziały od 98 do 100%.

W kolejnym kroku wyznaczono wybrane charakterystyki rozkładów stóp zwrotu analizowanych portfeli, które podano w tabeli 2. Jak widać, dla trzech najniższych poziomów γ , średnia stopa zwrotu portfeli SEM jest wyższa od średniej stopy zwrotu portfeli Markowitza. Dla pozostałych poziomów γ są one jednakowe. Prawie we wszystkich przypadkach maksymalna stopa zwrotu uzyskana w portfelach SEM jest wyższa nawet o 100% od analogicznych stóp uzyskanych z portfeli Markowitza. Jedynie w przypadku dwóch najwyższych poziomów γ zaobserwowano niemal identyczne wartości. W większości portfeli SEM, w porównaniu do portfeli Markowitza, zaobserwowano wyższe ujemne wartości minimalnych stóp zwrotu, ale dla dwóch najwyższych poziomów γ ponownie zaobserwowano niezwykle małą różnicę. Należy jednak zauważyć, że portfele SEM w większości przypadków są bezpieczniejsze od portfeli Markowitza, bowiem w porównaniu z nimi charakteryzują się mniejszą semiwariancją. Ta różnica maleje wraz ze wzrostem poziomu założonej stopy zwrotu. Dla dwóch maksymalnych stóp zwrotu portfele SEM są tak samo ryzykowne jak portfele Markowitza. Są to właściwie prawie takie same portfele. Przyczyną tego jest fakt, że zagwarantowanie wysokiej średniej stopy zwrotu z portfela ogranicza wybór do bardziej zyskowych walorów.

W kolejnym kroku badano istotność różnic między rozkładami stóp zwrotu rozpatrywanych portfeli. W tym celu posłużono się testem zgodności Kołmogorowa-Smirnowa dla dwóch prób, a otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 3. Na tej podstawie można stwierdzić z 95% pewnością brak statystycznie istotnej różnicy między rozkładami stóp zwrotu badanych portfeli. Dodatkowo przeprowadzono również badanie istotności różnic między

Tabela 3. Test Kołmogorowa-Smirnowa istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu badanych portfeli

Gamma	Wartość statystyki testu K-S	P value
0,00010	0,79785	0,547645
0,00100	0,93865	0,344232
0,00137	0,79785	0,547645
0,00200	0,75092	0,625623
0,00210	0,75092	0,625623
0,00300	0,42239	0,994107
0,00400	0,14080	1
0,00470	0,04693	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Test Kolmogorowa-Smirnowa istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu portfeli optymalnych i portfela o równych udziałach

Typ portfela	Gamma	Wartość statystyki testu K-S	P value
M	0,0001	1,267170	0,080599
SEM		0,703985	0,704592
M	0,001	1,267170	0,080599
SEM		0,750917	0,625623
M	0,001373	1,267170	0,080599
SEM		0,657053	0,781009
M	0,002	0,844782	0,483218
SEM		0,657053	0,781009
M	0,002103	0,844782	0,483218
SEM		0,703985	0,704592
M	0,003	0,891714	0,409452
SEM		1,079440	0,194604
M	0,004	1,877290	0,001737
SEM		1,877290	0,001737
M	0,0047	2,628210	0,000002
SEM		2,628210	0,000002

Źródło: obliczenia własne.

polskiego rynku. W badaniach uwzględniono następujące walory: akcje, metale szlachetne i towary rolne. Do wyznaczenia składu portfeli optymalnych zastosowano klasyczny model Markowitza i model SEM, minimalizujący semiwariancję portfela. Zwolennicy stosowania semiwariancji, jako miary ryzyka, podkreślają, że lepiej niż wariancja opisuje ona rzeczywiste preferencje inwestorów, ponieważ mierzy odchylenia tylko poniżej określonego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu.

Uzyskane wyniki pokazują, że przyjęcie danej miary ryzyka ma wpływ na skład optymalnego portfela. Większość portfeli SEM ma inny skład niż portfele Markowitza, przy czym różnią się one zarówno pod względem występujących walorów, jak i proporcji między ich udziałami. Dla każdej założonej stopy zwrotu część walorów występujących w obydwu rodzajach portfeli jest taka sama. Różnice między portfelami optymalnymi, wyznaczonymi zgodnie z modelem Markowitza a minimalizującymi semiwariancję, są szczególnie wyraźne w przypadku niskich założonych stóp zwrotu. W przypadku najwyższych założonych stóp zwrotu portfele SEM są prawie takie same jak portfele Markowitza. Przyczyną tego jest fakt, że zagwarantowanie wysokiej średniej stopy zwrotu z portfela ogranicza wybór do bardziej zyskownych walorów.

Większość portfeli SEM okazała się bezpieczniejsza od portfeli Markowitza, ponieważ charakteryzują się one niższą semiwariancją. Choć często są to portfele zyskowniejsze, to badanie istotności różnic między rozkładami stóp zwrotu rozpatrywanych portfeli testem Kolmogorowa-Smirnowa ujawniło z 95% pewnością brak statystycznie istotnej różnicy między rozkładami stóp zwrotu badanych portfeli. Przeprowadzone dodatkowo badanie istotności różnic między portfelami optymalnymi i portfelem o równych udziałach pozwoliło stwierdzić z 95% pewnością występowanie statystycznej różnicy między rozkładami portfeli Markowitza i SEM oraz portfela o równych udziałach walorów jedynie w przypadku dwóch najwyższych poziomów γ .

portfelami optymalnymi z portfelem o równych udziałach. Wyniki testu Kolmogorowa-Smirnowa zestawiono w tabeli 4. Na tej podstawie można stwierdzić z 95% pewnością występowanie statystycznej różnicy między rozkładami portfeli Markowitza i SEM oraz portfela o równych udziałach walorów w przypadku dwóch najwyższych poziomów γ . W pozostałych przypadkach brak statystycznie istotnej różnicy.

PODSUMOWANIE

Investowanie w towary stanowi doskonałą alternatywę dla inwestycji w instrumenty finansowe. Uwzględnienie towarów w portfelu pozwala osiągać korzyści z jego dywersyfikacji. Uważa się, że udział towarów nie powinien przekraczać 30%. Stąd, zgodnie z celem niniejszej pracy, dokonano weryfikacji tego zalecenia w warunkach

Podsumowując można stwierdzić, że w badanym okresie, niezależnie od zastosowanej metody doboru portfela, udział towarów powinien wynosić od 63 lub 78% do 100%, w zależności czy uwzględniamy wyłącznie bezpośrednią formę inwestowania w towary, czy również formę pośrednią – zakup akcji spółek sektora towarowego. Wzrost poziomu założonej stopy zwrotu pociągał za sobą wzrost udziału towarów w portfelu, bowiem w badanym okresie najwyższe stopy zwrotu generowały właśnie te walory. Są to więc wartości daleko przewyższające rekomendacje dla rynków zachodnich, które jednak są wynikiem badań przeprowadzonych na danych obejmujących długi horyzont czasowy od 10 do 35 lat. Natomiast badania, których wyniki przedstawiono w tej pracy są efektem analiz danych empirycznych obejmujących okres 4,5 roczny. Stąd pojawia się konieczność dalszych badań, które pozwolą na weryfikację otrzymanych wyników wraz z upływem czasu.

LITERATURA

- Drewniński M. 2007: Podstawy inwestowania na giełdach towarowych. Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Geman H. 2007: Commodities and commodity derivatives. John Wiley&Sons Ltd., West Sussex.
- Górska A., Krawiec M. 2009: Inwestowanie w towary jako forma dywersyfikacji portfela. [W:] Problemy Rolnictwa Światowego. Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie (w druku).
- Jajuga K., Jajuga T. 2005: Inwestycje. WN PWN, Warszawa.
- Markowitz H. 1952: Portfolio selection. *Journal of Finance*, nr 7, s. 77-91.
- Rutkowska-Ziarko A., Markowski L. 2007: Porównanie portfeli Markowitza i portfeli o minimalnej semiwariancji w warunkach zmienności koniunktury giełdowej. [W:] Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek. Prace Naukowe AE we Wrocławiu, nr 1176, Wrocław, s. 360-369.
- Schofield N.C. 2007: Commodity derivatives. John Wiley&Sons Ltd., West Sussex.
- Witkowska D., Matuszewska A., Kompa K. 2008: Wprowadzenie do ekonometrii dynamicznej i finansowej. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- www.e-numizmatyka.pl

Anna Górska, Monika Krawiec

Summary

CONSTRUCTION OF MARKOWITZ AND MINIMAL SEMIVARIANCE PORTFOLIOS INCLUDING INDIRECT AND DIRECT WAYS OF INVESTING IN COMMODITIES

Investing in commodities is a good alternative to investments in financial assets. Adding commodities to portfolio allows to obtain benefits from its diversification. Nevertheless, it is believed that share of commodities should not exceed 30 percent. Thus, the aim of the paper is to verify the recommendation on the Polish market. The analysis encompasses stocks of some enterprises listed at the Warsaw Stock Exchange, precious metals and agricultural items. In order to determine shares of separate assets within portfolio the following two methods are used: standard Markowitz model and SEM model that minimizes portfolio semivariance.

Adres do korespondencji:

dr Anna Górska
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Wydział Nauk Ekonomicznych
Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych
ul. Nowoursynowska 166
02-784 Warszawa
e-mail: anna_gorska@sggw.pl