

Krzysztof Wiśniński
Katedra Statystyki Matematycznej, AR w Szczecinie
e-mail: kwisinski@e-ar.pl

ZASTOSOWANIE MODELU MOTAD DO TWORZENIA PORTFELA AKCJI

Streszczenie: W artykule omówiono metodologię modelu MOTAD pod kątem zastosowania tej metody do tworzenia portfela akcji. Praktyczne wykorzystanie zaprezentowanej metody zilustrowano przykładem empirycznym.

Słowa kluczowe: podejmowanie decyzji, model MOTAD, portfel akcji.

KLASYFIKACJA WARUNKÓW PODEJMOWANIA DECYZJI

Przy podejmowaniu decyzji, w szczególności decyzji, które dotyczą inwestowania w akcje, ważnym problemem jest określenie warunków, w jakich są one podejmowane. Interesującą taksonomię decyzji zaproponował Kofler (zob. Kofler 1993, str. 6). Klasyfikuje on decyzje na:

- decyzje podejmowane w warunkach pewności; wiemy jaka będzie przyszłość - jest to przypadek deterministyczny;
- decyzje podejmowane w warunkach ryzyka; znamy rozkład prawdopodobieństwa przyszłych możliwych stanów;
- decyzje podejmowane w warunkach niewiedzy; nie mamy żadnych informacji o przyszłości;
- decyzje podejmowane w warunkach niepełnej informacji; przypadek pośredni pomiędzy decyzjami podejmowanymi w warunkach ryzyka i decyzjami podejmowanymi w warunkach niewiedzy.

Przy przyjętej klasyfikacji inwestowanie na giełdzie możemy zaliczyć do podejmowania decyzji w warunkach ryzyka lub do podejmowania decyzji w warunkach niepełnej informacji. Pierwsze podejście (warunki ryzyka) ma tę zaletę, że stosując je można często określić prawdopodobieństwo osiągnięcia celów inwestycyjnych. Jednak jego wadą jest przyjęcie, często trudnych do zweryfikowania, założeń związanych z rozkładami cen akcji. Z kolei w podejściu drugim (warunki niepełnej informacji) kosztem utraty ilościowych ocen, dotyczących prawdopodobieństwa realizacji celu inwestycji, uzyskuje się lepszą zgodność założeń modelowanego zjawiska z rzeczywistością. Przedstawiona w tym artykule metoda wspomagania decyzji inwestycyjnych traktuje inwestowanie jako decyzję podejmowaną w warunkach niepełnej informacji.

APLIKACJA MODELU MOTAD DO BUDOWY PORTFELA AKCJI

Podstawowymi „parametrami” każdej decyzji inwestycyjnej (portfela akcji) są spodziewany zysk (stopa zwrotu) i ryzyko jego osiągnięcia. Celem matematycznych metod wspomagających inwestowanie jest pogodzenie tych dwóch sprzecznych ze sobą celów i dostarczenie inwestorowi wartościowych wariantów strategii inwestycyjnych. Jednym z możliwych podejść do optymalizacji portfela akcji jest wykorzystanie metod programowania matematycznego.

Poniżej zostanie omówiony tzw. model MOTAD (Minimalization of the Total Absolute Deviation). Model ten został opracowany przez Hazella (zob. Hazell 1971) i został przez niego wykorzystany do optymalizacji produkcji roślinnej

w gospodarstwach rolnych. Metodologia metody MOTAD zostanie w niniejszym artykule omówiona przy założeniu wykorzystania jej do budowy portfela akcji.

Rozważmy pewien portfel n akcji, który spełnia pewne liniowe ograniczenia narzucone przez decydenta:

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą współczynników techniczno - ekonomicznych, \mathbf{x} - wektorem opisującym skład portfela (wektorem zmiennych decyzyjnych). Załóżmy dalej, że decydent posiada informacje o cenach każdej akcji w k momentach w przeszłości:

$$\begin{aligned} & y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1k}, \\ & y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2k}, \\ & \vdots \\ & y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nk}, \end{aligned}$$

(ceny akcji z przeszłości dobierane są w zależności od czasowego horyzontu inwestycyjnego, np. w przypadku inwestowania krótkoterminowego mogą to być ceny na zamknięciu sesji giełdowych). Niech \bar{y}_i , $i=1,2,\dots,n$, oznacza średnią arytmetyczną cen $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}$. Oznaczmy przez u_{is} , $i=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,k$, odchylenie ceny i -tej akcji w momencie s od średniej arytmetycznej \bar{y}_i ($u_{is} = y_{is} - \bar{y}_i$). Wprowadźmy teraz nieujemne zmienne odchylenia dodatnich z_i^+ oraz odchylenia ujemnych z_i^- , $i=1,2,\dots,k$, które będą spełniać warunek:

$$\sum_{s=1}^n u_{is} x_s + z_i^+ - z_i^- = 0. \quad (3)$$

W modelu MOTAD jako miarę ryzyka portfela akcji przyjmuje się wartość następującej sumy: $\sum_{i=1}^k z_i^+ + \sum_{i=1}^k z_i^-$. Zatem funkcja celu modelu będzie miała postać:

$$\sum_{i=1}^k z_i^+ + \sum_{i=1}^k z_i^- \rightarrow \min. \quad (4)$$

Ponieważ suma odchyleń dodatnich jest równa sumie odchyleń ujemnych:

$$\sum_{i=1}^k z_i^+ = \sum_{i=1}^k z_i^-,$$

zamiast ograniczenia (3) i funkcji celu (4) możemy wprowadzić ograniczenia

$$\sum_{s=1}^n y_{is} x_s + z_i^- \geq 0 \quad (5)$$

i funkcję celu

$$\sum_{i=1}^k z_i^- \rightarrow \min. \quad (6)$$

W modelu MOTAD miarą ryzyka jest więc suma ujemnych odchyleń cen akcji z przeszłości od średnich arytmetycznych tych przeszłych cen.

Tak jak wspomniano wcześniej, obok minimalizacji ryzyka, drugim celem portfela akcji jest maksymalizacja oczekiwanego zysku. Aby zapewnić satysfakcjonującą stopę zwrotu portfela, do modelu wprowadzimy ograniczenie wymuszające odpowiedni poziom realizacji spodziewanego zysku. Ograniczenie to będzie miało postać:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \geq \lambda. \quad (7)$$

Współczynniki b_1, b_2, \dots, b_n , wyznaczone na podstawie historycznych cen akcji, wyrażają oczekiwane stopy zwrotu z poszczególnych akcji w zakładanym czasowym horyzoncie inwestycyjnym. Wartość parametru λ zostaje określona przez decydena i wyraża akceptowaną przez niego stopę zwrotu portfela. Model decyzyjny określony przez ograniczenia (1), (2), (5) i (7) z funkcją celu (6) jest modelem, który minimalizuje ryzyko portfela akcji oraz maksymalizuje, poprzez osiągnięcie satysfakcjonującego poziomu realizacji, stopę zwrotu portfela. Zaletą metody MOTAD jest jej prostota metodologiczna oraz fakt, że rozwiązanie modelu otrzymuje się za pomocą zwykłego programowania liniowego. W alternatywnych modelach, które ograniczają ryzyko poprzez minimalizację wariancji (np. model VE - zob. np. Sengupta 1972, str. 244, Krawiec 1991, str. 46) rozwiązanie otrzymuje się przy wykorzystaniu procedur programowania kwadratowego.

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA MODELU MOTAD DO BUDOWY PORTFELA AKCJI

Naszym celem będzie zbudowanie portfela akcji, w skład którego będą mogły wchodzić cztery spółki: *A*, *B*, *C*, *D*. Portfel ten utworzymy kupując akcje na zamknięciu sesji piątkowej pewnego tygodnia (w tabeli 1 - sesja V). Przyjmujemy, że planowany okres inwestycji jest równy jednemu tygodniowi (pięć sesji giełdowych) oraz, że oczekiwana stopa zwrotu z każdej akcji będzie w tym okresie równa stopie, która się zrealizowała w tygodniu poprzedzającym inwestycję.

Tabela 1. Ceny akcji (w zł) na zamknięciu pięciu sesji giełdowych oraz stopy zwrotu tych akcji w tym okresie.

	Spółka A	Spółka B	Spółka C	Spółka D
Sesja I (Pon)	8,2	20,3	5,2	13,5
Sesja II (Wt)	8,6	19,5	6,0	14,1
Sesja III (Śr)	9,4	19,0	7,1	13,0
Sesja IV (Czw)	9,3	19,5	6,9	12,5
Sesja V (Pt)	9,5	19,7	7,3	14,4
Stopa zwrotu	0,16	-0,03	0,40	0,07
Średnia cena akcji	9,0	19,6	6,5	13,5

Źródło: opracowanie własne

Tabela 1 zawiera ceny akcji na zamknięciach pięciu kolejnych sesji, które poprzedzały planowaną inwestycję, średnie arytmetyczne tych cen oraz stopy zwrotu osiągnięte w czasie tego tygodnia.

Z kolei tabela 2 przedstawia wszystkie ograniczenia modelu oraz zawiera funkcję celu. Ograniczenie 1 określa kwotę przeznaczoną na inwestycję. Ograniczenia 2-7, które dotyczą inwestycji w poszczególne spółki oraz relacji między tymi inwestycjami, wynikają z preferencji decydenta. Z kolei ograniczenia 9-13, zgodnie z metodologią modelu MOTAD, są wprowadzone po to, aby za ich pomocą móc wyrazić ryzyko portfela. Lewa strona ograniczenia 8 opisuje spodziewany zysk z inwestycji. Ograniczenie to jest „sparametryzowane”; inwestor może przyjmować za parametr λ różne wartości.

Tabela 2. Model MOTAD optymalizujący portfel akcji.

Nr ograniczenia	Zmienne decyzyjne									Relacje	Wektor ograniczeń	Jednostki
	x_1 (A)	x_2 (B)	x_3 (C)	x_4 (D)	z_1^-	z_2^-	z_3^-	z_4^-	z_5^-			
1	1	1	1	1						=	10 000	zł
2	1	1	-0,5	-0,5						\geq	0	zł
3	1	1	-3	-3						\leq	0	zł
4			1							\geq	500	zł
5			1	-2						\leq	0	zł
6	1	-1,2								\geq	0	zł
7	1	-2,2								\leq	0	zł
8	0,16	-0,03	0,40	0,07						\geq	λ	zł
9	-0,8	0,7	-1,3		1					\geq	0	zł
10	-0,4	-0,1	-0,5	0,6		1				\geq	0	zł
11	0,4	-0,6	0,6	-0,5			1			\geq	0	zł
12	0,3	-0,1	0,4	-1,0				1		\geq	0	zł
13	0,5	0,1	0,8	0,9					1	\geq	0	zł
Funkcja celu					1	1	1	1	1	\rightarrow min		zł

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3. Rozwiązanie modelu MOTAD optymalizującego portfel akcji dla różnych wartości oczekiwanych stóp zwrotu portfela.

Oczekiwany zysk λ (zł)	x_1 (zł)	x_2 (zł)	x_3 (zł)	x_4 (zł)	Funkcja celu (ryzyko) (zł)
878	4091	3409	1153	1347	4521
1500	3268	2723	2358	1651	5541
2000	2218	1849	3895	2038	7340
2100	2008	1674	4202	2116	7700
2200	1930	1404	4444	2222	8146
2268	2288	1046	4444	2222	8785

Źródło: obliczenia własne

Tabela 3 zawiera rozwiązanie modelu portfela akcji z tabeli 2 dla przykładowych wartości parametru λ (model jest niesprzeczny jeśli parametr λ przyjmuje wartości z przedziału (877,12 zł – 2268,75 zł). Widać, że wymuszenie większej wartości oczekiwanej zysku daje portfele o większym ryzyku. Inwestor w zależności od swoich preferencji może wybrać rozwiązanie, które go satysfakcjonuje.

LITERATURA

Hazell P.B.R. (1971) A linear alternative to quadratic and semivariance programming for farm planning under uncertainty, *Amer. J. Agr. Econ.* (53), str. 53-62.

Kofler E. (1993) *Podjmowanie decyzji przy niepełnej informacji*, Real Publisher, Warszawa.

Krawiec B. (1991) *Metody optymalizacji w rolnictwie*, PWN, Warszawa.

Sengupta J.K. (1972) *Stochastic Programming*, Nort Holland, Amsterdam.

The application of motad model in indicating the optimum portfolio structure

Summary: The article describes the methodology of the MOTAD model. The example of the optimising portfolio structure of an insurance company has been used to show how the above-mentioned method works.

Key words: decision making, MOTAD model, portfolio.