

**Ewa Drabik**

Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

## **Wykorzystanie ciągu Ulama do analizy fal giełdowych**

### **Wstęp**

Od początku istnienia rynków kapitałowych wszyscy jego uczestnicy starają się znaleźć odpowiedź na pytanie, czy istnieją prawidłowości, które umożliwiają przewidywanie przyszłych ruchów cen walorów giełdowych. W tym celu analizują wykresy, wykorzystując znane metody, w tym analizę techniczną czy też fundamentalną. Analiza fundamentalna zakłada, że zasadniczy wpływ na zachowanie się rynków ma gospodarka. W tym przypadku decyzje podejmowane są na podstawie danych statystycznych, takich jak bilanse firm, poziom obrotów, wysokość płac, trendów rynkowych itp. Fundamentalista kupuje akcje, gdy kształtują się one poniżej ich statystycznych wartości. Analiza techniczna zakłada z kolei, że procesy giełdowe wyprzedzają w czasie zjawiska ekonomiczne. W tym przypadku przyjmuje się, że cena rynkowa akcji odzwierciedla nie tylko dane statystyczne, ale również wszystkie informacje mające wpływ na cenę waloru. Analiza techniczna to przede wszystkim analizowanie notowań walorów na wykresach. W jej przypadku zakłada się powtarzalność sytuacji, które miały miejsce w przeszłości. W związku z tym analitycy techniczni szukają historycznych analogii do sytuacji bieżącej i na podstawie historycznych zachowań prognozują ceny obecne. Przyjmują również, że ceny walorów tworzą trendy, czyli podążają w określonym kierunku w pewnych okresach. Analitycy techniczni na podstawie wykresów starają się określić możliwe do zidentyfikowania „formacje cenowe”, pozwalające prognozować przyszłe trendy notowań giełdowych.

Amerykański księgowy Ralph Nelson Elliott (1871–1948), będąc na emeryturze, opracował teorię fal giełdowych, która – jak stwierdził autor – „stanowi uzupełnienie koncepcji Dowa” [Frost, Prechter 1995], a w efekcie jest rozwinięciem analizy technicznej. Elliott zauważył, że ruchy cen walorów giełdowych kształtują się w rozpoznawalne wzory. Zaobserwował również, że pewne formacje fal powtarzają się, a bazą do dalszej analizy są wykresy notowań walorów giełdowych. Na podstawie wykresów można wywnioskować nie tylko, jakie walory można kupić, ale również, kiedy je kupić.

Wiele elementów teorii fal Elliotta opartych jest na ciągu Fibonacciego, który jest określony w sposób jednoznaczny, ale, jak się okazuje, nie zawsze jednoznacznie oddaje rzeczywiste zachowania fal giełdowych.

W latach 50. XX wieku Stanisław Ulam, amerykański matematyk polskiego pochodzenia, zmodyfikował ciąg Fibonacciego wprowadzając elementy losowości. Idea i własności tego ciągu zostały opisane przez przyjaciela Ulama, również matematyka polskiego pochodzenia pracującego w Stanach Zjednoczonych, Marka Kaca i opublikowane jako raport w Los Alamos (ze względu na miejsce i czas bardzo trudno jest wspomnianą publikację odnaleźć).

Celem pracy jest sprawdzenie, w jaki sposób modyfikacja ciągu Fibonacciego wprowadzona przez Ulama wpływa praktycznie na analizę wykresów złożonych z fal giełdowych. Faktem jest, że na rynkach kapitałowych zdarzają się okresy, w których nie można uzyskać jednoznacznej opinii na temat przyszłości, a w związku z tym wprowadzenie elementów losowości jest konieczne – zwłaszcza jeżeli chodzi o analizę wykresów.

Praca jest skonstruowana w następujący sposób. W części pierwszej zostały zaprezentowane własności ciągu Fibonacciego i jego rola w teorii fal Elliotta. W części drugiej przedstawiono sylwetkę Stanisława Ulama, a także opisano skonstruowany przez niego ciąg, który jest modyfikacją ciągu Fibonacciego. W części trzeciej została przeprowadzona analiza wykresów złożonych z cen wybranych walorów pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie pod kątem występowania ciągu Ulama.

## Teoria fal Elliotta a ciąg Fibonacciego

W XIII wieku włoski matematyk Leonardo Fibonacci (1180–1250) zaprezentował w Księdze Abakusa następujący ciąg: 1, 1, 2, 3, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377... Ciąg ten można wyrazić za pomocą formuły:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Cechą charakterystyczną tego ciągu jest to, że jeżeli podzieli się dowolny element tego ciągu przez liczbę bezpośrednio ja poprzedzającą, to otrzymuje się tak zwaną złotą liczbę  $\Phi$ :

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \approx 1,61803339\dots$$

Inne ważne własności liczby  $\Phi$  i ciągu Fibonacciego można ująć następująco:

$$1. \frac{1}{\Phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \approx 0,618... = \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$2. \frac{1}{\Phi^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} \approx 0,382...$$

$$3. \Phi^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} \approx 2,618...$$

$$4. \Phi^2 - \Phi = 1$$

$$5. \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = 1$$

$$6. \Phi - \frac{1}{\Phi} = 1$$

$$7. (\Phi + 1)^2 = \Phi^4$$

$$8. \Phi + \frac{1}{\Phi} = \sqrt{5}$$

$$9. \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

10. Liczba  $\Phi$  może być zapisana w postaci ułamka łańcuchowego:

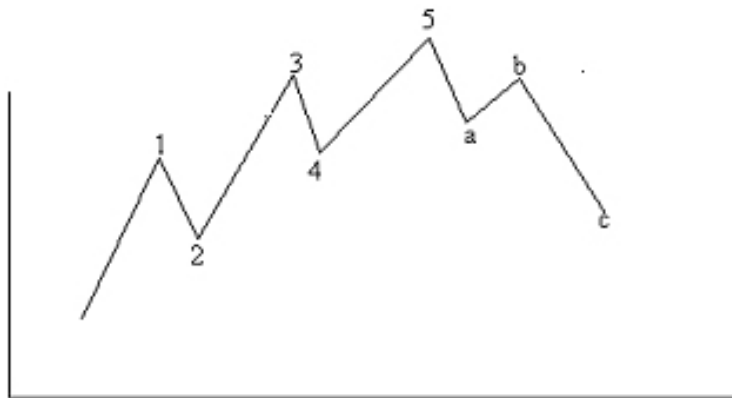
$$\Phi = [1; 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

11. Suma dowolnych dziesięciu liczb ciągu Fibonacciego jest podzielna przez 11.

Ciąg ten ma wiele zastosowań nie tylko na giełdzie, ale również w wielu innych dziedzinach. W 1963 r. powstało nawet Stowarzyszenie Fibonacciego (*The Fibonacci Association*), którego celem jest rozstrzygnięcie wszelkich kwestii związanych z liczbami Fibonacciego.

Ciąg Fibonacciego został wykorzystany przez Ralpa Elliotta w teorii fal giełdowych, która to teoria została opublikowana w serii artykułów w *Financial World Magazine* w 1939 r. We wspomnianych pracach Elliott opisał szereg formacji tworzonych przez fale giełdowe, które odpowiednio nazwał, zilustrował i opisał. Podał również wiele reguł, które umożliwiają rozpoznawanie wzorów fal i przewidywanie prawdopodobnych ruchów cen walorów giełdowych, a tak-

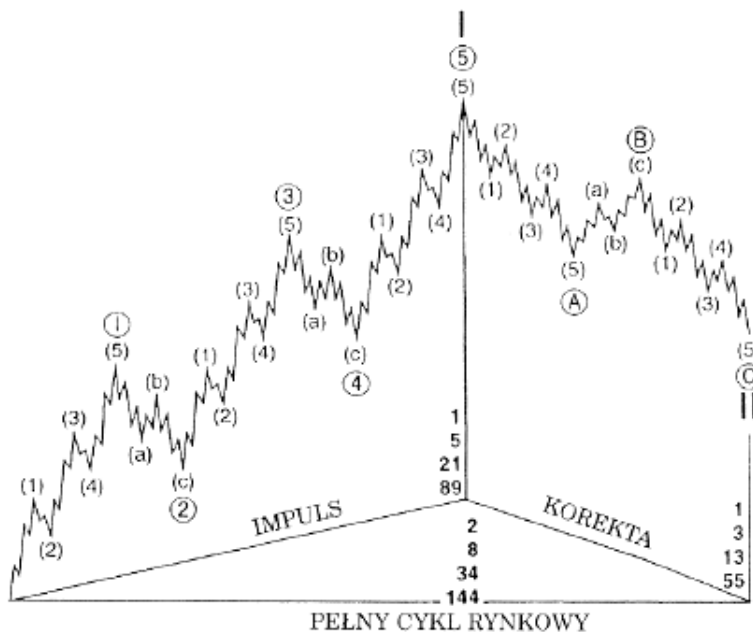
że ustalenie ewentualnej strategii rynkowej. Wskazówki zaprezentowane przez Elliotta pozwalają również przewidywać tzw. punkty krytyczne oraz jak długo dany wzór fali będzie się kształtował [Fisher 1995, Frost, Prechter 1995]. Elliott analizował przede wszystkim wykresy składające się z dwóch części: impulsu i korekty (rys. 1 i 2).



**Rysunek 1**

Ilustracja podstawowej formacji w teorii fal Elliotta

Źródło: Opracowanie własne.



**Rysunek 2**

Ciąg Fibonacciego w pełnym cyklu złożonym z korekty i impulsu według Elliotta  
Źródło: Na podstawie pracy [Frost, Prechter 1995].

Elliott przyjął, że faza impulsu składa się z pięciu fal, a korekta jest formacją trójfalową. Zatem pełny cykl to osiem fal. Po zakończeniu ośmiofalowego cyklu rozpoczyna się podobny cykl złożony z pięciu fal wzrostowych i trzech spadkowych. Posługując się tą samą zasadą budowania fal wyższego stopnia można dojść do pełnego cyklu rynkowego (rys. 2). Przy kolejnym podziale dostajemy 21 fal impulsu i 13 fal korekty. Pełny cykl giełdowy składa się z kolei z 89 fal impulsu i 55 fal korekty, co daje 144 fale (rys. 2). Wymienione liczby tworzą ciąg Fibonacciego, co zostało również pokazane w tabeli 1.

Na rysunku 2 fale mniejszego trendu oznaczone są jako 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c (rys. 1). Fale wtórnego trendu zapisane są za pomocą cyfr oraz liter w nawiasach: (1), (2), (3), (4), (5), (a), (b), (c), a w przypadku fal trendu głównego cyfry i litery zapisane są w kółkach (rys. 1 i 2).

Liczby Fibonacciego można zaobserwować w wielu innych procesach giełdowych, o czym piszą J. Nowakowski oraz K. Borowski [Nowakowski, Borowski 2005]. Obserwuje się np., że długość jednej z fal w jego formacjach jest równa 0,618 drugiej. Liczba 0,618 jest to stosunek dwóch kolejnych liczb Fibonacciego.

**Tabela 1**

Podział pełnego cyklu giełdowego według Elliotta

| Liczba fal        | Rynek rosnący impuls | Rynek malejący korekta | Łącznie          |
|-------------------|----------------------|------------------------|------------------|
| Stopnia wyższego  | 5 ( $a_5$ )*         | 3 ( $a_4$ )            | 8 ( $a_6$ )      |
| Stopnia średniego | 21 ( $a_8$ )         | 13 ( $a_7$ )           | 34 ( $a_9$ )     |
| Stopnia niższego  | 89 ( $a_{11}$ )      | 55 ( $a_{10}$ )        | 144 ( $a_{12}$ ) |

\* W nawiasach zapisano „numery” ciągu Fibonacciego.

Źródło: Na podstawie pracy [Fisher 1995].

Nowakowski i Borowski [2005] wspominają również, że przy identyfikacji punktów zwrotnych na giełdzie (zmian tendencji rynkowych) pomocny może okazać się następujący wzór:

$$c_n = b + a_n$$

gdzie:

$c_n$  oznacza datę (rok) docelowy – punkt zwrotny na giełdzie,

$b$  jest obserwowanym rokiem zmian tendencji rynkowej,

$a_n$  jest elementem ciągu Fibonacciego.

Autorzy ci twierdzą, że zmiany tendencji rynkowych, które miały miejsce w latach 1949, 1957, 1962 i 1965, pozwoliły na identyfikację punktu zwrotnego na rynku w następujący sposób:

$$1949 + 21 = 1970,$$

$$1957 + 13 = 1970,$$

$$1962 + 8 = 1970,$$

$$1965 + 5 = 1970.$$

Okazuje się, że istotnie w 1970 r. indeks Dow Jonesa miał najniższą wartość. Można zauważyć, że do „kolejnych lat”, w których miały miejsce zmiany tendencji rynkowych, dodawane są elementy ciągu Fibonacciego. Oprócz wymienionych zaobserwowano wiele innych zjawisk na giełdzie, które odzwierciedlają „istnienie” liczb Fibonacciego, a także liczby  $\Phi$  – złotego podziału – w procesach giełdowych [Nowakowski, Borowski 2005].

Rzeczywista analiza zarówno fal, jak i procesów giełdowych nie potwierdza jednak teorii fal Elliotta. Liczba fal nie zawsze odpowiada jednoznacznie identyfikowalnym elementom ciągu Fibonacciego. Modyfikacja tego ciągu wprowadzone przez Ulama o wiele lepiej „pasuje” do opisu procesów zachodzących na giełdzie, czego dowodzą zaprezentowane w dalszej części pracy badania empiryczne.

## Sylwetka i osiągnięcia Stanisława Ulama

Stanisław Marcin Ulam (1909–1984) urodził się we Lwowie w zamożnej rodzinie inteligenckiej. Wczesne dzieciństwo podczas I wojny światowej spędził z rodzicami w Wiedniu. Gimnazjum i studia politechniczne ukończył we Lwowie. Magisterium i doktorat z matematyki Ulam uzyskał w tym samym 1933 r. pod kierunkiem Kazimierza Kuratowskiego. Współpracował z najlepszymi matematykami słynnej szkoły polskiej, takimi jak: Stefan Banach, Hugon Steinhaus, Stanisław Mazur i inni. Do Stanów Zjednoczonych wyjechał po raz pierwszy w 1935 r. na zaproszenie Johna von Neumana do Princeton. Do 1939 r. w okresie wakacyjnym wracał jednak do Lwowa.

W 1939 r. wraz z grupą polskich matematyków, takich jak Marek Kac, Alfred Tarski, Otto Nikodym, na stałe wyemigrował do USA. Dostał stypendium na Harvardzie. W latach 1941–1943 był profesorem na Uniwersytecie Wisconsin w Madison. Od 1944 do 1967 r. pracował w Los Alamos National Laboratory w stanie Nowy Meksyk nad konstrukcją bomby wodorowej, którą zaprojektował wspólnie z Węgrem Tellerem i innymi. W okresie 1965–1977 był profesorem na Uniwersytecie Colorado w Boulder. Przebywał również czasowo na wielu uniwersytetach: na Uniwersytecie Południowej Kalifornii w Los Angeles, w Massachusetts Institute of Technology, na Uniwersytecie Kalifornijskim w La Jolla, a także na Uniwersytecie Forydzkim w Gainesville. Napisał 150 prac i trzy książki. Umarł nagle na atak serca w 1984 r. w Santa Fe.

Był człowiekiem bardzo wszechstronnym i udowodnił wiele interesujących twierdzeń z teorii mnogości, teorii miary, procesów stochastycznych i topologii. Interesował się układami nieliniowymi, komputerami i metodami numerycznymi. Był współtwórcą jednej z pierwszych metod numerycznych, a mianowicie metody Monte Carlo. Ulam niechętnie wdawał się w szczegóły pracy matematycznej, gdyż wolał stawiać otwarte zagadnienia głównie z zastosowań matematyki, zwłaszcza w naukach przyrodniczych. Za pomocą komputerów Ulam studiował ewolucję organizmów żywych, a także gromad gwiazd będących pod wpływem przyciągania grawitacyjnego. Badania te doprowadziły Ulama do „sprytnego” pomysłu zainicjowania syntezy paliwa termojądrowego w bombie wodorowej. Z zainicjowaniem zapłonu tejże bomby kłopot miały najświetlejsze umysły pracujące w owym czasie w wielu ośrodkach badań jądrowych. Pomysł Ulama polegał na wykorzystaniu promieniowania rentgenowskiego emitowanego w ciągu pierwszej mikrosekundy reakcji łańcuchowej, która zachodzi podczas wybuchu bomby atomowej. Podczas wybuchu bomby atomowej, pełniące funkcję zapalnika, intensywne promieniowanie rentgenowskie zostaje zogniskowane na paliwie termojądrowym, po czym rozgrzewa je i dodatkowo spręża, tak aby zainicjować reakcję syntezy. Ulam opracował także technologię ogniskowania promieniowania rentgenowskiego podczas zapłonu bomby termojądrowej [Thorne 2004].

Ulam zadawał wiele otwartych pytań, które stały się inspiracją dla wielu matematyków. Jednym z jego licznych pomysłów była modyfikacja ciągu Fibonacciego, o której wspomina Marek Kac w wywiadzie udzielonym Michaelowi Feigenbaumowi [Wywiad... 1982]. Zmodyfikowany przez Fibonacciego ciąg Ulama przyjmuje postać:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} \left\{ \text{który z wyrazów } a_1, \dots, a_n \text{ wzięty z prawdopodobieństwem } \frac{1}{n} \right\}.$$

Marek Kac stwierdził, że pomysł Ulama tak go zainspirował, iż zaczął nad nim pracować i swoje rozważania opublikował jako raport w Los Alamos. Przykładowe realizacje ciągu Ulama są następujące:

1 1 2 3 4 5 9 12 13 25 34 35 69 103...

1 1 2 3 4 6 8 11 13 16 18 21 23 41...

1 1 2 3 5 6 7 8 9 10 12 20 22 24....

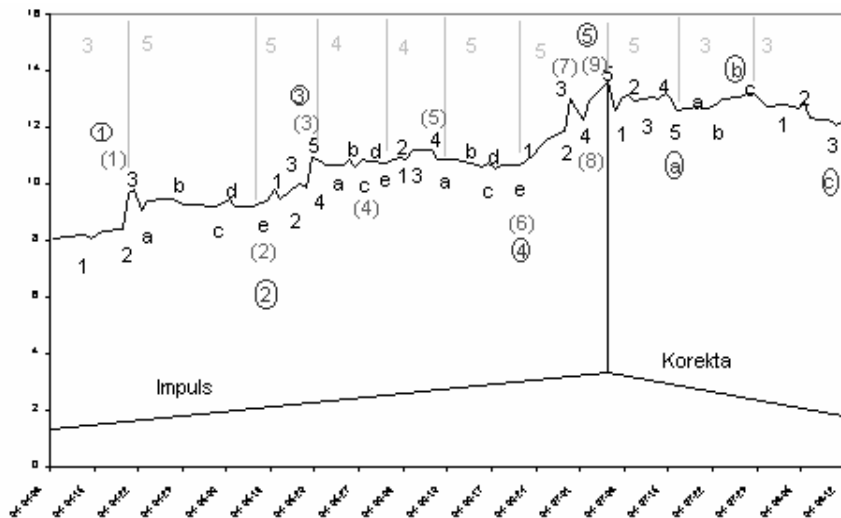
....

1 1 2 3 5 7 9 11 12 13 15 19 23 38...

Przypuszczalnie modyfikacja ciągu Fibonacciego wprowadzona przez Ulama może rozszerzyć, a przede wszystkim urealnić teorię fal Elliotta, co zostanie pokazane w kolejnej części pracy. Zostaną zaprezentowane badania empiryczne wykorzystujące szeregi czasowe złożone z cen akcji pochodzących ze spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

## Występowanie liczb pochodzących z ciągu Ulama na giełdzie Papierów Wartościowych

W dalszym ciągu przeanalizowane zostaną fragmenty wykresów złożonych z cen dwóch spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Wykresy, a właściwie ich fragmenty, zostały dobrane w ten sposób, aby widoczne były impuls i korekta. Do badań użyto szeregów czasowych złożonych z cen akcji Krosna i Żywca. W obydwu przypadkach można zauważyć, że liczby pochodzące z ciągu Fibonacciego występują jedynie dla fal wyższych stopni, a mianowicie w przypadku notowań Krosna wystąpiła sekwencja 5–3, a w przypadku Żywca zaobserwowano sekwencję 3–5. Formacje złożone z fal niższych stopni tworzą sekwencje zawierające realizacje ciągu Ulama. Szczegółowa analiza została pokazana na wykresach (rys. 3 i 4), a opisana poniżej.



**Rysunek 3**

Ciąg Ulama w pełnym cyklu giełdowym dla spółki Krosno (badany okres 08.04.2004–12.08.2004)

Zacznijmy analizę od wykresu złożonego z notowań spółki Krosno w okresie 08.04.2004–12.08.2004. W tabeli 2 zostały zaprezentowane liczby odpowiadające kolejnym formacjom fal powstającym w pełnym cyklu giełdowym.

Kolejne formacje podstawowe w przypadku spółki Krosno składają się z następujących liczb: 3–5, 5–4, 4–5, 5–5, 3–3 (rys. 3). Na podstawie zestawienia podanego w tabeli 2, a także liczb występujących w kolejnych formacjach można przyjąć, że sekwencjom fal dla spółki Krosno odpowiadają następujące realizacje ciągu Ulama:





**Tabela 3**

Podział na formacje różnych stopni w pełnym cyklu giełdowym dla spółki Żywiec (badany okres 05.10.2005–10.02.2006)

| Liczba fal        | Rynek rosnący impuls | Rynek malejący korekta | Łącznie |
|-------------------|----------------------|------------------------|---------|
| Stopnia wyższego  | 3                    | 5                      | 8       |
| Stopnia średniego | 6                    | 9                      | 15      |
| Stopnia niższego  | 23                   | 18                     | 41      |

Źródło: Opracowanie własne.

Zostały przebadane również inne spółki. Szeregi czasowe złożone z ich cen nie tworzyły sekwencji, która układałaby się w ciąg Fibonacciego (zob. również [Drabik 2007]). Można zatem stwierdzić, że analiza fal giełdowych pokazuje, iż liczba fal nie zawsze odpowiada jednoznacznie identyfikowalnemu ciągowi Fibonacciego, co zakłada w swojej teorii Elliott. Okazuje się, że ciąg Ulama o wiele rzetelniej oddaje rzeczywistość panującą na giełdzie. Teoria fal Elliotta oparta wyłącznie na ciągu Fibonacciego może prowadzić do błędnych wniosków i skutecznie zniekształcać różnego rodzaju prognozy. Jednak wiele elementów tej teorii, mimo upływu lat, w dalszym ciągu pozostaje słusznym. Tak jest np. w przypadku kształtów formacji, a także niektórych reguł, które umożliwiają inwestorom oraz analitykom giełdowym zrozumienie aktualnej pozycji rynku i rozpoznawanie ukształtowanych wzorów. Wysokość obrotów to również raczej realizacja ciągu Ulama, gdyż ciąg Fibonacciego w tej sytuacji zupełnie się nie sprawdza. Reasumując, teoria fal Elliotta może zyskać na znaczeniu, jeśli ciąg Fibonacciego zostanie zastąpiony ciągiem Ulama.

## Literatura

- DRABIK E., 2007: Ciąg liczbowy Ulama i jego zastosowanie na rynkach finansowych, *Przebieg Statystyczny* 4 (54), s. 19–33.
- FISHER R., 1995: *Liczby Fibonacciego na giełdzie*, Wydawnictwo WIG Press, Warszawa.
- FROST A.J., PRECHTER R.R., 1995: *Teoria fal Elliotta*, Wydawnictwo WIG Press, Warszawa.
- KOMAR Z., 1993: *Sztuka spekulacji*, Wydawnictwo PRET, Warszawa.
- MYCIELSKI J., 1990: Stanisław Marcin Ulam (1909–1984), *Wiadomości Matematyczne* 29, s. 20–34.
- NOWAKOWSKI J., BOROWSKI K., 2005: *Zastosowanie teorii Carolana i Fishera na rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Difin, Warszawa.
- THORNE K.S., 2004: *Czarne dziury i krzywizny czasu*, Wydawnictwo Prószyński i S-ka, Warszawa.

Wywiad, 1982: Reflections of Polish masters. An interview with Stan Ulam and Mark Kac by Mitchell Feigenbaum, Los Alamos 3, No 3, 54. Tłumaczenie polskie. 1993: Refleksje polskich mistrzów – wywiad ze Stanisławem Ulamem i Markiem Kacem przeprowadzony przez Mitchella Feigenbauma, *Wiadomości Matematyczne* 31 (1993), s. 93–114.

## **An application of Ulam’s sequence to analysis of the stock waves**

### **Abstract**

The aim of this paper is to modify one of technical analysis instruments that can be used for description of stock value diagrams as well as forecasting the future asset prices – it is the so called Elliott Waves Theory. In classic version this theory is based on the Fibonacci sequence. Modification of Fibonacci sequence was introduced in the fifties of the 20. century by American mathematician Stanislaw Marcin Ulam, who was born in Poland, and consists of introducing random elements.

The analysis of waves created by prices will be presented in reference to the companies from Warsaw Stock Exchange.