

Ewa Drabik

Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Kilka uwag o formalnych zasadach matematycznego modelowania zjawisk ekonomicznych i interakcji społecznych

Wstęp

Matematyka jako nauka abstrakcyjna, której językiem są symbole i formalizmy, wyrosła na gruncie badania świata materialnego. Elementy rachunków i wyobrażeń geometrycznych kształtowały się pod wpływem obserwacji. Trudno jednak stwierdzić, w jaki sposób rozwijały się u ludzi pojęcia abstrakcyjne. Rola samych matematyków w rozwiązywaniu tej kwestii jest raczej niewielka i rozwiązania należy tu szukać biorąc do pomocy innych naukowców. Matematyka sama w sobie tworzy natomiast często wyimaginowane obiekty, ale także rodzi nowe idee, które zaczynają żyć własnym życiem, a nawet rozwijają się niezależnie. Wdziera się do zagadnień techniki, produkcji, ekonomii oraz nauk przyrodniczych. Często jednak bada formy rzeczywistości nie wnikając do końca w ich treść, dlatego w gruncie rzeczy przybliża rzeczywistość, a dokładniej buduje pewien schemat przebiegu rzeczywistych zjawisk i następnie go bada.

Matematyka należy do tych niewielu nauk, których elementy zaczęły się kształtować wraz z rozwojem ludzkości. Wyobrażenia matematyczne kształtowały się pod wpływem codziennego doświadczenia. Znaczące postępy w tej dziedzinie zostały dokonane już w starożytnych Egipcie i Grecji. Przed starożytnymi Grekami nie było właściwie matematyki w naszym rozumieniu. Były to tylko rozproszone recepty na rozwiązanie poszczególnych zadań, związanych z rolnictwem, budownictwem, rachunkami handlowymi, podatkami i wojskowością. Prawdziwą eksplozję rozwoju zagadnień matematycznych odnotowano w XVII i XVIII wieku. Wtedy też matematyka zaczęła się rozwijać jako samodzielna nauka. Wówczas to nowoczesna fizyka zaledwie zdążyła się narodzić, chemia była w stadium embrionalnym, ekonomia wprawdzie istniała, ale była to nauka głównie opisowa, wykazująca co najwyżej potrzebę „uściślenia” wielu zagadnień, a biologia – w dzisiejszym rozumieniu tej nauki – „nawet się nie poczęła”. W wieku XIX i na początku XX matematyka i inne nauki zostały grun-

townie przekształcone przez odkrycia, z których szybko wyrosły ogólne teorie. I tak na przykład teoria grup, pozostająca w XIX wieku w ramach algebry, została wykorzystana przez fizykę XX wieku. Kluczowym osiągnięciem dziewiętnastowiecznej matematyki było jednak odkrycie nieeuklidesowej geometrii, która nie musi spełniać aksjomatu równoległości, co doprowadziło do powstania modeli istotnych dla teorii względności. Również rachunek tensorowy, opracowany w ramach geometrii różniczkowej, został wykorzystany przez teorię względności. W owym czasie powstały algebra macierzy, teoria grup, algebra Boole'a i prawie natychmiast znalazły zastosowanie w ekonomii, elektrotechnice oraz fizyce atomu.

Gwałtowny rozwój teorii ekonomii, a właściwie teorii gospodarki wolnorynkowej, nastąpił po 1776 roku, kiedy to ukazała się praca Adama Smitha zatytułowana „Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów”, w której znalazły się słynne słowa o „niewidzialnej ręce rynku”. Oprócz tych słów we wspomnianej pracy Smith wprowadził pojęcie wartości naturalnej, co obecnie utożsamiane jest z tzw. ceną równowagi. Smith rozumiał wartość naturalną jako cenę przeciętną, „ustalającą się” w dłuższych okresach, równą sumie płac, renty gruntowej i zysków z kapitału, co składało się na koszty produkcji. W miarę rozwoju tej teorii okazało się, że aby sprawdzić argumenty Smitha dotyczące zharmonizowanych interakcji nieskrępowanej gospodarki, niezbędna jest jakaś naturalna struktura pozwalająca modelować interakcje uczestników rynku i formułować odnośne wnioski wynikające z tych interakcji. Można powiedzieć, że już wówczas zaistniała więc potrzeba tworzenia modeli służących do opisu zjawisk ekonomicznych.

Mniej więcej w tym samym czasie francuski ekonomista François Quesnay (1694–1774) podjął próbę stworzenia mechanizmu rządzącego gospodarką. W rezultacie w 1759 roku powstała pierwsza w ekonomii tablica przepływów międzygałęziowych, tzw. *tableau economique*, co można uznać za jeden z pierwszych modeli ilustrujących określone zjawisko ekonomiczne.

Konstruowanie modeli jest metodą stosowaną w celu uproszczenia problemów i zwiększenia w ten sposób szans na ich rozwiązanie. Obecnie modelem nazywa się bądź zbiór założeń upraszczających bądź sam przedmiot modelowania, lub też zbiór przedmiotów spełniających określone założenia. Istnieje podział modeli na realne i nominalne. Model realny można otrzymać przez konstrukcję fizycznego układu przedmiotów, upraszczającego badaną rzeczywistość, a zarazem dostatecznie do niej upodobnioną. Model nominalny to, w pewnym sensie, również układ „przedmiotów”, którymi mogą być indywidua, klasy, a nawet relacje przyporządkowane wyrażeniom danej teorii. Niezależnie od rodzaju modelu należy pamiętać, że jest on tylko formalnym opisem wymagającym weryfi-

kacji. Sprawdza się go doświadczalnie. Jeżeli wynikające z niego wnioski pasują do rzeczywistości, to można go uznać za model dobry.

W przypadku ekonomii oraz nauk społecznych model powinien być dostatecznie szeroki, aby umożliwić uwzględnienie całego szeregu zjawisk i reakcji ekonomicznych. Rzeczywiste używanie symboli matematycznych w opisie zjawisk gospodarczych zostało zapoczątkowane dopiero w XVIII wieku przez Antoine'a Cournota (1802–1877), w wydanej w 1838 roku książce zatytułowanej: „Rozważania nad zasadami matematycznymi teorii bogactwa”. Należy jednak zaznaczyć, że przez wiele lat nie sprzedano ani jednego egzemplarza tej książki, ale jak się okazało nie z powodu wzorów, tylko braku zrozumienia! W 1863 roku Cournot zdecydował się na nowe wydanie, z którego usunął matematykę, co niestety nie zwiększyło poczytności tekstu. Podobny los spotkał także inne prace opatrzone wzorami matematycznymi. Dopiero w latach 70. XIX wieku posługiwanie się matematyką stało się powszechne. Zaczęły się pojawiać modele matematyczne zmierzające do opisu zjawisk ekonomicznych za pomocą układów równań. Modele proponowane przez Leona Warlasa w Szwajcarii (1834–1910) i Wilfreda Pareto we Włoszech (1848–1923) zapoczątkowały nurt w ekonomii zwany szkołą matematyczną. Warlas w pracy zatytułowanej „Elementy ekonomii politycznej” (1874) użył układu równań do opisu zależności pomiędzy cenami towarów a popytem i podażą. Nie umiał wprowadzić go rozwiązać, ale sugerował w ten sposób, że istnieje cena, przy której obie wymienione wielkości wyrównują się, zachowując inne warunki założone w tym opisie. Innymi słowy sugerował, że istnieje punkt równowagi dający się wyrazić w postaci liczbowej. Poprawny dowód istnienia punktu równowagi nie był jednak w tym czasie możliwy do przeprowadzenia, gdyż nawet matematyka nie dysponowała odnośnymi narzędziami. Brakowało na przykład twierdzenia o punkcie stałym, które dopiero w 1909 roku sformułował i udowodnił Brouwer [Wycech-Łosiowa 1973].

John M. Keynes (1883–1946), autor epokowego dzieła „Ogólna teoria zatrudnienia, procentu i pieniądza” z 1936 roku, wpłynął zasadniczo na dalszy rozwój myśli ekonomicznej, ale zasłynął z tego, że niezbyt chętnie stosował matematykę w swoich badaniach, a tych co ją stosują wręcz dyskryminował. Twierdził proroczo, że to głównie reakcje psychologiczne uczestników rynku pozwalają osiągnąć stan równowagi. Dopiero czytelnicy Keynesa, na przykład L.R. Klein, w oparciu o jego opisowe teorie tworzyli sformalizowane modele gospodarcze. Odnotować także należy, że wraz z rozwojem modelowania ekonomicznego pojawiały się i inne liczne głosy krytyki. Pisano: „(...) Rachunki nie są przyczyną ani skutkiem i z tego względu nie są przedmiotem naszych dociekań. Otóż we wszystkich naukach pewność tkwi w oczywistości samych przedmiotów. Jeśli nie osiągniemy tej oczywistości, która poddaje rachunkowi

fakty i dane dające się liczyć i mierzyć, rachunek nie naprawi naszych błędów” [Siedlecki 2000, s.13].

Powszechnie przyjmuje się, że współczesna ekonomia matematyczna i ekonometria narodziły się na przełomie lat 20. i 30. XX wieku „w serii prac” genialnego matematyka węgierskiego pochodzenia, o szerokich zainteresowaniach, Johna von Neumana (1903–1957). Był on autorem licznych prac z zastosowań matematyki w różnych dziedzinach wiedzy. Jego przyjaciel, amerykański matematyk polskiego pochodzenia, Stanisław Ulam twierdził nawet, że jedyną dziedziną, w której von Neuman nie próbował stosować matematyki była stomatologia. Von Neuman zauważył, że wiele zagadnień ekonomicznych, zwłaszcza tych, w których dochodzi do rywalizacji albo też kooperacji, można „spaizować” (od greckiego słowa oznaczającego „grę”), co oznacza, że można sformułować je w języku teorii gier. W 1937 roku Neuman napisał na przykład pracę o wiele mówiącym tytule: „O pewnym układzie równań ekonomicznych i uogólnieniu twierdzenia Brouwera o punkcie stałym”. Jego artykuły z zastosowań matematyki w ekonomii zakresu zostały zebrane w pracy „Teoria gier i postępowania ekonomicznego”, która ukazała się w 1944 roku, a została opublikowana wspólnie z ekonomistą Oskarem Morgensternem. Warto jednak w tym miejscu nadmienić, że twórcami szeroko rozumianej teorii gier, wyrosłej z matematyki, a stosowanej m.in. w naukach społecznych, są polscy matematycy ze słynnej szkoły lwowskiej. Pierwsza praca z teorii gier autorstwa Hugona Steinhausa z 1925 roku, zatytułowana „Definicje potrzebne do gry i pościgu”, ukazała się w jednodniówce „Myśl akademicka” we Lwowie. Jest to niewielka praca, niemająca nawet charakteru publikacji naukowej, w której zostało wprowadzone pojęcie strategii (rozumianej jako sposób gry), normalizacji gry, pojęcie funkcji wypłaty, które charakteryzuje każdą grę oraz zasada wyboru strategii minimaksowej. Według Steinhausa, gra jest walką i zabawą równocześnie, i nie istnieje cywilizacja bez gier. Należy jednak zaznaczyć, że pisząc tę pracę Steinhaus nie wiedział, że znany matematyk Emil Borel parę lat wcześniej (1921, 1924) doszedł do podobnych co on sam wniosków, wprowadzając pojęcie strategii czystej, mieszanej i był bliski sformułowania twierdzenia o minimaksie. Po wojnie praca Steinhausa była nieosiągalna i sam autor ustanowił nagrodę za jej odnalezienie. W 1957 roku profesor Ajdukiewicz znalazł egzemplarz w bibliotece Uniwersytetu Lwowskiego. Następnie w 1960 roku za sprawą Stanisława Ulama praca ta po przetłumaczeniu dotarła do Stanów Zjednoczonych. Została opublikowana w fachowym piśmie zajmującym się sprawami morskimi *Naval Research Logistic Quaterly* i została opatrzona wstępem przez znanego

ekonometryka Harolda Kuhna¹ [Ryll-Nardzewski 1973]. Inne prace z zakresu teorii gier, a właściwie dotyczące sprawiedliwego podziału pisali Stefan Banach i Bronisław Knaster, również z lwowskiej szkoły matematyki.

Należy odnotować, że również Abraham Wald był autorem dwóch prac ekonomicznych, które uzupełnił wzorami (1935, 1936). Zostały w nich sformułowane modele matematyczne opisujące zjawiska gospodarcze oraz podano ścisłe dowody istnienia równowagi w tych modelach. Prace te zostały jednak docenione dopiero w latach 50. XX wieku i stały się impulsem powstania nowych kierunków badań we współczesnej ekonomii. Prace Walda dały początek teorii równowagi ogólnej, a prace Neumana teorii liniowych modeli wzrostu gospodarczego.

Pisząc o pionierskich pracach z ekonomii, w których użyto matematyki, nie sposób nie wspomnieć o pracach Jana Tinbergena i Michała Kaleckiego.

W lipcu 1933 roku nakładem Instytutu Badań Koniunkturalnych ukazała się praca Michała Kaleckiego „Próba teorii koniunktury”. Jesienią tego roku jej skróconą wersję Kalecki przedstawił w języku niemieckim na III europejskiej konferencji Towarzystwa Ekonometrycznego (Leyden, 30.09–2.10.1933). Angielska wersja wspomnianego referatu, zatytułowana „A Macrodynamic Theory of Business Cycles”, została opublikowana w 1935 roku w *Econometrica*, No. 3, pp. 327–344. W analogicznym okresie opublikowano również francuską wersję „Próby teorii koniunktury”.

Głównym przedmiotem „Próby teorii koniunktury” jest teoria cyklu, a także problemy związane z nakręcaniem koniunktury światowej oraz aspektami pełnego zatrudnienia. Cyklami koniunkturalnymi Kalecki zajął się, ponieważ zainspirowała go praca Tinbergena „Ein Schiffbauzyklus?”². Tinbergen przedstawił w niej model endogenicznego cyklu budowy statków i opisał za pomocą równania różniczkowego z opóźnieniem:

$$\dot{f}_t = -af_{t-\vartheta}, \quad a > 0$$

gdzie $\vartheta \approx 2$ jest opóźnieniem,

f_t – jest funkcją rozmiarów globalnego tonażu,

\dot{f}_t – przyrostem tonażu w czasie t (pierwsza pochodna po czasie),

a – jest współczynnikiem intensywności reakcji zmian tonażu w stosunku do jego globalnych rozmiarów.

¹Harold Kuhn wspominał również o tym fakcie prezentując referat zatytułowany „58 years as a game theorist: where have we been and are we going?” w trakcie konferencji z teorii gier: SING w 2006 roku we Włoszech. Nadmienił przy tym, że jest to pierwsza praca o grach.

²„Weltwirtschaftliches Archiv”, Kiel. 1931, t. XXXIV, cz. 2, s. 152–164.

Opóźnienie θ oraz intensywność reakcji a prowadzą w modelu Tinbergena do cyklicznych wahań budowanych statków. Ten właśnie pomysł wykorzystał Kalecki w „Próbie teorii koniunktury”, gdzie opisał cykliczne zmiany inwestycji, zysków, globalnej produkcji i zatrudnienia. Swoją teorię obwarował wieloma bardzo istotnymi założeniami. Przyjął, między innymi, że układ gospodarczy jest zamknięty i pozbawiony trendu, co w gruncie rzeczy prowadzi do tego, że po każdym cyklu powraca do stanu pierwotnego. Dodatkowo założył, że ogólna wielkość zapasów w okresie całego cyklu pozostaje stała. Kolejne ważne założenie dotyczyło czasu wykonania inwestycji. Założył on bowiem, że czas ten nie zależy od rodzaju inwestycji.

Model cykli koniunkturalnych zaprezentowany przez Kaleckiego nie doczekał się jednak należytego miejsca w teorii ekonomii. Łączy się ów model raczej z nazwiskiem Nicolasa Kaldora, który go udoskonalił (Drabik 2003). Teorie ekonomiczne Kaleckiego bardzo często poparte są wyrafinowanym, jak na współczesne mu czasy, aparatem matematycznym. Warto dodać, że Kalecki był samoukiem zarówno z matematyki, jak i ekonomii.

Kolejnym wartym odnotowania faktem jest książka Paula Samuelsona zatytułowana „Zasady analizy ekonomicznej” z 1945 roku, która została opatrzona przez autora wiele mówiącym mottem: „Matematyka to język” [Wycech-Łosiowa 1973, s. 106].

Lata powojenne to stopniowy i coraz intensywniejszy rozwój ekonomii matematycznej, ekonometrii, badań operacyjnych i teorii gier. Wymienione dziedziny starały się ująć w postaci modeli zasadnicze procesy gospodarcze, jakimi są: produkcja, transport, rozdział strumieni dóbr, wzrost gospodarczy, teoria cykli koniunkturalnych, wszelkiego rodzaju procesy decyzyjne, a także konkurencja, kooperacja i negocjacje. Za pomocą matematyki badano te procesy wyciągając wnioski o treści ekonomicznej. Do konstrukcji modeli ekonomicznych, ekonometrycznych i decyzyjnych używano wielu pojęć matematycznych w zależności od poruszanej tematyki. Wiele zagadnień zostało sformułowanych w języku „podzbiorów wypukłych przestrzeni liniowych” i ich przekształceń ciągłych, a głównym narzędziem dowodowym stały się twierdzenia o punkcie stałym. Badania operacyjne (podejmowanie decyzji) zawierające teorię optymalizacyjną posługiwały się programowaniem liniowym i dynamicznym. Podejmowanie decyzji, jak powszechnie wiadomo, jest elementem każdej działalności gospodarczej. Prawie w każdym przypadku przy podejmowaniu decyzji trzeba spełnić określone warunki. Można zatem mówić o zbiorze decyzji dopuszczalnych, który w większości przypadków jest wypukłym podzbiorem pewnej przestrzeni, a liczba elementów tego zbioru jest równoliczna ze zbiorem liczb rzeczywistych (ma moc continuum). W związku z istnieniem nieskończonej liczby decyzji dopuszczalnych zrozumiałe jest dążenie ekonomistów do podjęcia

decyzji najlepszej, w sensie optymalnej. W tym celu formułuje się kryterium optymalizacyjne. Zarówno kryterium optymalizacyjne, jak i same warunki zapisuje się w języku matematyki, a kryterium przedstawia się jako funkcję celu. Do zapisania i rozważenia owych warunków używa się algebry liniowej. Algebra liniowa służy tu do opisywania obiektów strukturalnych umieszczonych w przestrzeniach \mathbf{R}^n . W tym przypadku pojawia się potrzeba zmiany sposobu myślenia odnośnie przejścia z płaszczyzny lub „namacalnej” jeszcze przestrzeni \mathbf{R}^3 do \mathbf{R}^n , co może stanowić sporą trudność dla ekonomistów. \mathbf{R}^n nie jest „po prostu kolejną” przestrzenią, lecz uogólnieniem teorii przestrzeni pewnego typu. Przez to zastosowanie algebry do opisu zjawisk ekonomicznych wymaga swobodnego przechodzenia od języka operatorów liniowych do języka macierzy.

Coraz częściej stosuje się, zwłaszcza przy modelowaniu procesów ekonomicznych zmieniających się w czasie, równania różniczkowe. Często, gdy trajektorie będące rozwiązaniami tychże równań „tracą” stabilność, remedium na ten „kłopot” staje się teoria chaosu [Creedy 1994]. Sięgnięto również do procesów stochastycznych, gdyż wiele zmieniających się w czasie zagadnień ekonomicznych zależy od przypadku, a randomizacja decyzji jest sprawą dość powszechną. Coraz częściej również stosuje się w ekonomii wyniki dotyczące gier, w tym bayesowskich (np. aukcje). Konkurencja i kooperacja prezentowane w języku teorii gier to coraz częściej rozważane zagadnienia nie tylko w ekonomii, ale również w zarządzaniu. Na szczególną uwagę zasługuje „wymyślny” przez Melvina Dreshera i Merrila Flooda z Rand Corporation w latach 50. XX wieku dylemat więźnia, który, jak się okazało, nie jest patologią, ale normą w naukach społecznych.

Coraz więcej zagadnień ekonomicznych pozornie „niematerialnych”, bo sterowanych przez „niewidzialną rękę rynku”, daje się wyjaśnić za pomocą zmatematyzowanych praw fizyki. Dotyczy to wielu zagadnień, zwłaszcza związanych ze stanami równowagi. Od pewnego czasu przyjmuje się bowiem, że równowaga ekonomiczna to nie tylko równość popytu i podaży, ale również stan gospodarki, do którego układ pozostawiony sam sobie samoczynnie dąży pod wpływem pola „sił”, które na niego oddziałuje. Istnieje podejście mówiące, że w wielu układach ekonomicznych stan tzw. równowagi trwałej może być stanem wymuszonym przez skończoną liczbę oscylacji. Przy takim podejściu do analiz używa się tzw. modelu pajęczyny. Można wprawdzie spotkać się z twierdzeniem, że trwałe stany równowagi wymuszonej nie są ekonomicznie pożądane, ale nikt nie kwestionuje, iż są one konieczne do osiągnięcia różnych celów, w tym pozaekonomicznych, co potwierdza na przykład ostatni kryzys w świecie finansów. Wymuszenie „równowagi” nastąpiło przez „wpompowywanie” ogromnych kwot na ratowanie banków i innych instytucji finansowych.

Analiza dynamicznego charakteru równowagi, nie zawsze oczywistego dla niektórych ekonomistów, oraz zjawiska równowagi cząstkowej (ruchomej) doprowadziła do skonstruowania odpowiednich modeli dynamicznych wielu zjawisk. Modelami takimi, a także określeniem ich stabilności zajmowali się: wspomniany już P. Samuelson, K.J. Arrow, T. C. Koopmans, J.R. Hicks, G. Stigler, R. Lucas oraz inni. Warto dodać, że ze względu na złożoność obliczeniową współczesnych modeli określających układ ekonomiczny w równowadze, a także nawracające coraz głębsze kryzysy społeczno-ekonomiczne, pojawiło się w ekonomii pojęcie nierównowagi jako stałej cechy układów gospodarczych [Siedlecki 2000, s. 19].

Modelowanie zjawisk ekonomicznych

Współczesny ekonomista nie może się obejść bez aparatu matematycznego. Jeden ze swoich artykułów A. Smoluk zaczął słowami Henriego Theila: „(...) prawa ekonomiczne wyrażają się w większości przypadków w dość prostej formie matematycznej” [Smoluk 1988, s. 11]. Otóż wydaje się, że słowa te prawdziwie oddają istniejący stan rzeczy. Model ekonomiczny to uproszczone odzwierciedlenie rzeczywistości, które jednak nie uwzględnia wszystkich jej aspektów. Na ogół eliminowane są informacje mające niewielkie znaczenie, co pozwala ekonomiście skupić się na cechach zasadniczych rzeczywistości ekonomicznej. W teorii modelowania zjawisk ekonomicznych przy użyciu formalizmów matematyki można w zasadzie wyróżnić dziedziny: ekonomię matematyczną, ekonometrię i teorię podejmowania decyzji, zwaną również badaniami operacyjnymi, a także teorię gier.

Ekonomia matematyczna jest to, w uproszczeniu, dziedzina ekonomii wykorzystująca język matematyki do tworzenia modeli w postaci układu założeń o powiązaniach między charakteryzującymi dane zjawisko zmiennymi ekonomicznymi. W przeciwieństwie do ekonometrii preferuje ona podejście aksjomatyczne do określonego problemu, pomijając często weryfikację owych założeń. Model ekonomiczny wyrażony w języku matematyki powinien uwzględniać istotne dla danego problemu zmienne ekonomiczne oraz nie powinien zawierać apriorycznych założeń co do rezultatów, jakie mają powstać w wyniku interakcji między różnymi uczestnikami.

Istnieje podejście, które mówi, że ekonomia matematyczna zrodziła się na bazie ekonomii klasycznej, a konkretnie jej ważnego działu, za który uważa się teorię użyteczności. Rozważa się na ogół koszyk dóbr, względem którego uczestnicy rynku przejawiają pewne preferencje, co w efekcie sprowadza się do tego, że wektorowi x z przestrzeni \mathbf{R}^n (może to być wektor określający pewne zasoby)

przyporządkowuje się liczbę rzeczywistą $u(\mathbf{x})$, zwaną użytecznością wektora \mathbf{x} . Znając z kolei funkcję użyteczności, poszukuje się takiego koszyka dóbr, który zmaksymalizuje użyteczność przy danym układzie cen i ustalonych wydatkach. Otrzymuje się w ten sposób określone zadanie decyzyjne.

Ekonometria, z kolei, zrodziła się z powiązania badań matematyczno-ekonomicznych z doświadczeniem, a modele ekonometryczne to formalny matematyczny opis istniejących, często potwierdzonych doświadczalnie, istniejących prawidłowości ekonomicznych. Charakteryzuje się tym, że dąży do empirycznego badania powiązań między mierzalnymi zjawiskami ekonomicznymi. Ekonometria to także nauka zajmująca się ustalaniem za pomocą metod statystycznych konkretnych ilościowych prawidłowości występujących w zjawiskach ekonomicznych. Model ekonometryczny, z kolei, to konstrukcja formalna, która za pomocą równania lub układu równań przedstawia zasadnicze powiązania występujące między rozpatrywanymi zjawiskami ekonomicznymi. Istnieją różne rodzaje modeli ekonometrycznych: statyczne i dynamiczne, deterministyczne i stochastyczne, proste, czyli opisujące związek tylko między dwoma wielkościami, i złożone, czyli ustalające relacje między większą liczbą zmiennych. Kolejne podziały to: liniowe i nieliniowe, jednorównaniowe i wielorównaniowe, symulacyjne i prognostyczne, bezwarunkowe i warunkowe, przyczynowo-skutkowe, symptomatyczne, kontrolne i optymalizacyjne itd. Konstruując model ekonometryczny należy pamiętać o tym, że wskazane jest, aby miał on nie tylko wartość poznawczą z punktu widzenia teorii ekonomii, ale również wartość praktyczną, czyli aby mógł służyć jako narzędzie wnioskowania w przyszłość. Bibliografia poświęcona modelom ekonometrycznym jest ogromna.

We wstępnej części niniejszej pracy zostało zasugerowane, że budując modele konkretyzujemy prawa nauki. W zależności od „modelowanych zagadnień” terminy i pojęcia naukowe powinny być dobrze zdefiniowane; określony ma być również zakres znaczeniowy. Okazuje się, że jest to jednak zbyt mało, aby zbudować dobry model ekonometryczny. Istnieją jednak liczne przeszkody uniemożliwiające prawidłową konstrukcję modelu ekonometrycznego. Należą do nich m.in. ubogie ilościowo, niekompletne i obciążone błędami dane statystyczne, brak wiarygodnej teorii ekonomicznej gwarantującej bezbłędny dobór zmiennych, zmienne wchodzące w skład modelu nie powinny być ze sobą skorelowane i ten problem jest trudny do wyeliminowania. Należy również ograniczyć dążność do wprowadzenia do modelu wyłącznie zmiennych silnie skorelowanych ze zmienną endogeniczną, gdyż generowane jest w ten sposób zjawisko powtarzania. Prawdą jednak jest, że nauki społeczne bardzo często zajmują się procesami wykazującymi silne wzajemne skorelowanie. Reasumując, konstrukcja modelu ekonometrycznego polega na odtworzeniu związków i relacji łączących zmienną objaśnianą z trafnie dobranymi zmiennymi objaśniającymi. Z punktu widzenia

„czystej” matematyki model ekonometryczny jest również „gładką rozmaitością” zanurzoną w przestrzeni euklidesowej wymiaru skończonego. Współrzędne tej rozmaitości interpretuje się ekonomicznie [Smoluk 1988]. Smoluk twierdzi również, że model ekonometryczny jest „konstrukcją sztuczną, aproksymującą w jakimś sensie dane statystyczne” [Smoluk 1988, s. 13].

Warto dodać, że nadrzędnym celem tworzenia modelu ekonometrycznego jest prognozowanie. Proces wnioskowania w przyszłość na podstawie modelu ekonometrycznego nazywamy predykcją, konkretny zaś wynik tego procesu nazywa się prognozą.

Kolejne miejsce w modelowaniu zjawisk ekonomicznych zajmują procesy podejmowania decyzji. Najczęściej rozwiązuje się je za pomocą programowania matematycznego. W celu sformułowania, a następnie rozwiązania problemu decyzyjnego można posłużyć się następującym schematem.

Zminimalizować (lub zmaksymalizować) $f(\mathbf{x})$ przy warunku $\mathbf{x} \in X$, gdzie \mathbf{x} może być nieznaną liczbą rzeczywistą, nieznanym wektorem liczb rzeczywistych, nieznaną funkcją, nieznanym wektorem, którego składowymi są funkcje; f oznacza daną funkcję, która nazywana jest funkcją celu, X oznacza zbiór warunków ograniczających; zbiór ten może być określony za pomocą pewnego układu warunków (np. nierówności i równości). Rozwiązaniem dopuszczalnym nazywa się każdy element \mathbf{x} zbioru X , a rozwiązaniem optymalnym nazywa się element \mathbf{x}^* zbioru X minimalizujący (lub maksymalizujący) funkcję celu, tj.

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) \quad (\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*))$$

Należy jednak pamiętać, że bardzo często formułując problem, nie jest jasne czy istnieje rozwiązanie optymalne, mało tego – czy istnieje rozwiązanie dopuszczalne. Jeżeli nie istnieje rozwiązanie dopuszczalne, to problem prognozowania matematycznego nazywany jest problemem sprzecznym. W przeciwnym wypadku problem jest niespreczny, co nie jest jednak równoznaczne z istnieniem rozwiązania optymalnego [Grabowski 1980]. Warto dodać, że najbardziej znane jest programowanie liniowe (układ warunków oraz funkcja celu zapisane są w formie równań lub nierówności liniowych). Rozwiązanie tego problemu wymaga znajomości algebry liniowej i dobrego rozumienia istoty i własności przestrzeni \mathbf{R}^n . Prawdopodobnie większość rzeczywistych problemów decyzyjnych to jednak problemy wielokryterialne rozstrzygane przez grupę decydentów, którzy podejmując decyzje inspirowani są zasadą Pareto: „dany stan świata A jest bardziej preferowany niż B, jeśli przynajmniej jedna osoba ma lepiej a nikt gorzej w A niż w B”.

Często w procesach podejmowania decyzji powstają sytuacje zbliżone do tych, z którymi mamy do czynienia w różnego rodzaju grach, a tymi zajmuje się teoria gier. Bada ona modele takich sytuacji decyzyjnych, w których wynik zależy od kilku niezależnych podmiotów, mających pewną swobodę działania i podejmowania decyzji – czyli graczy. Decyzje gracze podejmują w ramach reguł gry. Suma niezależnie podjętych działań generuje nowy stan, który można uznać za wynik gry. Każdemu wynikowi odpowiada określona wypłata, która stanowi miarę stopnia osiągnięcia celu każdego z rywali. Miara ta może przyjmować postać pieniężną i zazwyczaj jest wyrażana w kategoriach zysku i kosztu. Wypłatę można zdefiniować również w kategoriach zdobyczy terytorialnych, liczby osób zabitych lub rannych (w grach wojennych), stopnia opanowania rynku, obniżek stawek celnych itp. Reasumując, wypłata stanowi syntetyczny miernik preferencji gracza. Spośród określonych reguł gry gracze dobierają strategie. W grach strategia określa plan ruchów, których w trakcie gry nie może zmienić ani przeciwnik, ani natura. Zdarzają się również sytuacje, podczas których dwie lub kilka grup stara się osiągnąć własne cele. Cele mogą być zarówno zbieżne jak i przeciwstawne. Można zatem mówić o kooperacji lub konkurencji. Każda grupa bądź pojedynczy podmiot usiłuje znaleźć najlepszą w danych warunkach linię postępowania (optymalną strategię). Każda gra podlega z góry określonym regułom. Grupy, czyli gracze, wykonują ruchy w określonym porządku. Każdemu ruchowi odpowiada wypłata. Gdy przy końcu gry suma wygranych jest równa zeru, to gra jest nazywana grą o sumie zerowej. W przeciwnym wypadku jest to gra o sumie niezerowej. Gracze powinni obrać takie strategie, aby zapewnić sobie maksymalną wygraną nawet przy najlepszej odpowiedzi przeciwnika. W tym celu stosowane są różne metody, również te wykorzystujące programowanie matematyczne. Teoria gier, pomimo iż nakłada bardzo silne warunki na sposób przebiegu gry, pozwala uzyskać wiele wniosków o dużym znaczeniu praktycznym w różnych gałęziach wiedzy. Teoria gier ma dużą przyszłość, gdyż może zajmować się nie tylko modelowaniem zjawisk gospodarczych, w których uczestniczą konkurujące lub kooperujące ze sobą podmioty, ale również uwzględniać nastroje i reakcje uczestników rynku (w sposób liczbowy). Zapoczątkowana w latach 80. XX wieku przez psychologów Daniela Kahnemana i Amosa Tversky'ego teoria perspektywy, która mówi, że gospodarka nie tylko „prawidłowości”, ale również ludzie oddziałujący przez swoje zachowania na rynek, może znaleźć swoje odzwierciedlenie również w modelach ekonomicznych, a to właśnie za sprawą teorii gier. Rozwój ekonomii behawioralnej, bo taką nazwę nosi nurt zapoczątkowany przez Kahnemana i Tversky'ego, przyczynił się także do „zakwestionowania”, a właściwie rozszerzenia podstawowych założeń, na których opiera się teoria gier – założenia o racjonalności i egoizmie graczy.

Prezentacja materiału naukowego z użyciem wzorów

Prezentacja materiału naukowego jest sztuką i niezbędnym elementem warsztatu naukowego [Stone 1961]. Oprócz zasad pisania wzorów ilustrujących omawiane zagadnienia należy pamiętać o tym, że dobry artykuł naukowy powinien być pisany zgodnie z przyjętymi przez piśmiennictwo naukowe zasadami. Najważniejsze jest to, co się chce czytelnikowi przekazać i w tym celu należy odrzucić zbędne szczegóły. Jeremy Bernstein, popularyzator nauki, stwierdził, że najważniejsze jest to, aby sam autor wiedział, co pisze i mówi [Stern 1983]. Pisząc pracę naukową należy wyrażać się w sposób jasny, prosty i uporządkowany. Należy atrakcyjnie, a jednocześnie oszczędnie przedstawiać fakty.

Artykuł bądź inna praca naukowa powinny być napisane zwięzłym językiem i stanowić obiektywny opis badań oraz wynikających z nich rozważań. Mogą jednak zawierać odwołania do innych prac, co pozwoli lepiej uzasadnić argumenty związane z wynikami własnych badań [Lindsay 1995].

W artykule bądź pracy naukowej już we wstępie należy jasno określić przedmiot i cel pracy. Artykuł przeznaczony do publikacji w wybranym czasopiśmie naukowym oprócz precyzyjnego wywodu i zwięzłego języka powinien mieć także szczególne cechy stylu wymaganego przez redakcję tego czasopisma. Wyniki badań złożone z więcej niż kilku liczb wygodnie jest przedstawić w formie wykresów i tabel. Użycie tych narzędzi nie zwalnia jednak od napisania spójnego tekstu, który powinien zawierać odwołania do wspomnianych tabel i wykresów. Rysunki i wykresy są dobrą formą prezentacji materiału, jeżeli celem jest wskazanie ogólnej tendencji. Użycie wzorów ilustrujących omawiane zagadnienia jest jak najbardziej uzasadnione, pod warunkiem, że mają one ścisły związek z prezentowanymi badaniami.

Wskazane jest, by tekst został podzielony na akapity, gdyż jest to pomocne, gdy trzeba się skupić na jednym i to konkretnym elemencie. Styl artykułu nie powinien być „kwiecisty” ani też napisany niejednoznacznościami. Kryterium jasnego wyrażania wszelkiego rodzaju myśli lub argumentów powinno przyświecać całemu tekstowi.

Na szczególną uwagę zasługują prace, w których celowe wydaje się użycie symboli oraz wzorów, czyli „języka matematyki”. Termin „język matematyki” rozumiany jest jako zestawienie symboli, wzorów i tekstu słownego w określonym języku. Symbole matematyczne oraz wzory powinny przeplatać się z tekstem słownym. Zdarza się jednak, że wiele prac z tzw. matematyki „czystej” składa się prawie wyłącznie ze wzorów i tylko od czasu do czasu występują zwroty „stąd”, „zatem”, „z tego wynika” itp. Jest także wiele prac, o których na pierwszy rzut oka trudno powiedzieć, że są pracami matematycznymi, gdyż przypominają czystą beletrystykę. Istnieją również teksty „mieszane”, z mniej-

szą lub większą symboli matematycznych. W tekstach tych zarówno część symboliczna, jak również słowna odgrywa zasadniczą, aczkolwiek często różną rolę. Słowny tekst powinien być jednak ściśle związany z tekstem symbolicznym, o czym było już wspomniane. Korzystanie z tekstu słownego w publikacjach naukowych jest konieczne, ale powinien to być język standaryzowany. Istnieje pewien sposób standaryzacji połączeń języka matematyki z tekstem słownym również w pracach ekonomicznych. W tym celu w konkretnej dziedzinie ustala się dokładne reguły wprowadzania nowych wyspecjalizowanych terminów przez eliminację wyjątków gramatycznych i pozostawienie tylko tych, które są niezbędne do przekazywania myśli. Chodzi o to, ażeby nawet pobieżna znajomość języków obcych wystarczała do zrozumienia napisanych prac.

Symboliką posługiwano się już w starożytności. Pozwalała ona bowiem na uściślenie języka i przekształcenie go w wygodny aparat ułatwiający myślenie. Symbole matematyczne stanowią uniwersalny aparat, który powstał z tradycji mowy i pisma. Język symboli matematycznych ma to do siebie, że pozwala na zapisanie dowolnej teorii, w której celowe wydaje się użycie „języka matematyki”. Stosuje się przy tym syntaktyczne środki języka: związki logiczne zastępują spójniki, funkcje opisują relacje między podmiotem a orzeczeniem, kwantyfikatory zastępują słowa „wszystkie”, „pewne” itp. Należy jednak pamiętać, że nie istnieje „język matematyczny”, który mógłby posłużyć do opisania nawet najbardziej wyrafinowanych teorii matematycznych bez słów. Umiejętne stosowanie symboliki łącznie z tekstem zwiększa dokładność nie tylko wykładu matematycznego, ale również wielu innych dziedzin z zakresu zastosowań matematyki. Należy pamiętać o tym, że do wykazania słuszności rozumowania nie są aż tak konieczne wyrafinowane pojęcia i struktury aksjomatyczne. Wystarczy do tego celu jedynie zrozumienie zastosowanych symboli i jasna idea tego, co zamierza się napisać [Thom 1974].

Nie ulega wątpliwości, że aby stworzyć jakikolwiek model przy użyciu języka matematyki, trzeba biegle operować podstawowymi pojęciami z tej dziedziny. „Postęp matematyki i jej żywotność zależały zawsze od abstraktu, który pomagał konkretowi, oraz od konkretnego żywiącego abstrakt” [Kac 1963, s. 203].

Podsumowanie

Zagadnienia zastosowań matematyki generują nowe idee matematyczne i na odwrót, istnieją teorie matematyki „czystej”, które mogą okazać się przydatne w praktyce. Nigdy nie jest do końca jasne, które to idee można „odkomenderować” do zastosowań i vice versa, jaki model opisujący rzeczywistość stanie się bodźcem do tworzenia nowych teorii matematycznych.

Istnieją takie dziedziny wiedzy, których przedstawiciele wnoszą potężne barykady przeciwko przenikaniu matematyki do ich nauki. Nie brakuje ich również wśród ekonomistów. Zdarzają się również matematycy dumni z faktu, że nic z tego, co kiedykolwiek stworzyli, nie dało się zastosować do czegoś innego niż czystej matematyki. Z drugiej jednak strony, należy pamiętać, że nic na siłę. Istnieje, zwłaszcza w ekonomii, olbrzymie zapotrzebowanie na rzemiosło matematyka. Służąc rzeczywistości nie należy jednak porzucać marzeń i dzielić matematykę na czystą i stosowaną. „Połączone razem tworzą nowe marzenia i nowe namiętności. Rozłączone, mogą zginąć oba” [Kac 1963, s. 204]. Najważniejsze w nauce jest jednak to, aby nie zaszufładować myśli twórczej, gdyż prowadzi to do kompletnej destrukcji. W tym miejscu warto za Markiem Kacem przytoczyć słowa Einsteina, który w autobiograficznym szkicu wyraził zaniepokojenie poziomem nauczania w czasach mu współczesnych (teraz jest jeszcze gorzej – przyp. autorki): „W rzeczywistości nie odbiega od cudu to, że nowoczesne metody nauczania jeszcze zupełnie nie zdławiły świętej ciekawości dociekań; bowiem ta delikatna roślina poza potrzebą bodźca wymaga głównie wolności, bez której niewątpliwie stanie się wrakiem i ruiną. Jest ciężkim błędem myśleć, że radość poszukiwań i badań można podsycić przymusem i poczuciem obowiązku.” [Kac 1963, s. 202].

Literatura

- CREEDY J., MARTIN V.L., 1994: Chaos in non-linear models in economics. Edward Elgar Publishing, Cornwall 1994.
- DRABIK E., 2003: Twórczość Kaleckiego po latach. *Myśl Ekonomiczna i Prawna*, Nr 3, 26–47.
- GRABOWSKI W., 1980: Programowanie matematyczne. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- KAC M., 1963: Matematyka, jej kierunki i napięcia. *Wiadomości Matematyczne*, Nr 6, 199–204.
- KAŁUŻNIN Ł.A., 1964: O języku informacyjnym matematyki. *Wiadomości Matematyczne*, Nr 7, 237–244.
- LINDSAY D. 1995: Dobre rady dla piszących teksty naukowe. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- RYLL-NARDZEWSKI., 1973: Prace Hugona Steinhausa o sytuacjach konfliktowych. *Wiadomości Matematyczne*, Nr 17, 29–38.
- SIEDLECKI J., 2000: Równowaga a wzrost gospodarczy. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Wrocław.
- SMOLUK A., 1990: Teoria aproksymacji a ekonometria. *Przegląd Statystyczny*, Nr 37, 4, 243–255.
- SMOLUK A., 1998: Modalność i prognozy. *Przegląd Statystyczny*, Nr 45, 1, 11–23.

- STEARNS A. (red.), 1983: Współczesna matematyka. Dwanaście esejów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- STONE M.H., 1961: Matematyka i przyszłość nauki. *Wiadomości Matematyczne*, Nr 4, 161–175.
- THOM R., 1974: Matematyka nowoczesna. *Wiadomości Matematyczne*, Nr 18, 113–129.
- WYCECH-ŁOSIOWA M., 1973: Sympozjum Matematycznych Metod Ekonomii, jego problematyka, cele i przebieg. *Wiadomości Matematyczne*, Nr 14, 105–109.

Several comments on formal rules of mathematical modeling economic phenomena and social interactions

Abstract

Mathematics as an abstract science was derived from studies and analyses of the material world. However, “pure” mathematics very often creates its imaginary objects which develop independently, lead their own “imaginary” lines and very seldom have their equivalent in the surrounding reality. Nevertheless a completely new aspect of mathematics is highlighted when it is used for describing real phenomena, since – due to its highly formalized language – it enables practitioners, including economists, to specify relations and operations between objects under study.

In order to achieve this goal the appropriate models have been created. The construction of new models in economic science (and in many other domains) aims simplifying and formalizing many problems which, in fact, may increase the probability of finding relevant solutions. Furthermore, from the economic point of view, due to the high precision with highlighted above models work, essential conclusions are to be drawn, which subsequently may prove relevant for the progress of science.

The aim of this paper is to present how modeling economic phenomena and social interactions have been developed within many years by using formalized language of mathematics economic phenomena and social interactions which have been developed within many years by using formalized language of mathematics.

